

## Übungsblatt 8

### Aufgabe 1:

Sei  $A$  eine rationale Matrix. Der *Chvátal-Rang* von  $A$  ist die kleinste Zahl  $t$  für die  $\{x : Ax \leq b\}^{(t)} = \{x : Ax \leq b\}_I$  für jeden ganzzahligen Vektor  $b$  gilt. Der *starke Chvátal-Rang* von  $A$  ist der Chvátal-Rang der Matrix  $[I \ -I \ A \ -A]^T$ .

Sei  $A$  eine total unimodulare Matrix und  $n \in \mathbb{N}$ . Beweisen Sie, daß der starke Chvátal-Rang von  $nA$  höchstens 1 ist. (3 Punkte)

### Aufgabe 2:

Betrachten Sie das *Gewichtete-Maximum-Clique-Problem* für ungerichtete Graphen, wie es als Beispiel in Kapitel 1.1 der Vorlesung eingeführt wurde. Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^{V \cup E}$  das zugehörige Polytop, das durch die folgenden Ungleichungen beschrieben wird:

$$P : \begin{array}{ll} y_e - x_i & \leq 0, \quad i \in e \in E \\ x_i + x_j - y_e & \leq 1, \quad e = ij \in E \\ 0 \leq x, y & \leq 1. \end{array}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, Schnittebenen (*Cutting Planes*) für  $P$  zu ermitteln, d.h. gültige Ungleichungen für  $P_I$ . Seien dazu für einen Clique-Inzidenzvektor  $(x, y) \in \mathbb{R}^{V \cup E}$  und für  $S, T \subseteq V$  mit  $S \cap T = \emptyset$

$$x(S) := \sum_{i \in S} x_i, \quad y(S) := \sum_{i, j \in S; i \neq j} y_{ij} \quad \text{und} \quad y(S, T) := \sum_{i \in S; j \in T} y_{ij}.$$

- Zeigen Sie, daß  $P$  voll-dimensional ist, d.h.  $\dim(P) = n + \binom{n}{2}$ .  
(*Hinweis:* Finden Sie einen inneren Punkt von  $P$ .)
- Zeigen Sie, daß  $P_I$  voll-dimensional ist.
- Zeigen Sie  $x(S) - y(S) \leq 1$  für alle Mengen  $S \subseteq V$  mit  $|S| = 3$ .

- (d) Sei  $S \subseteq V$  und  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Die Verallgemeinerung der Ungleichung aus (c) ist die *Clique-Ungleichung*

$$\alpha x(S) - y(S) \leq \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2}. \quad (1)$$

Beweisen Sie, daß jede Clique-Ungleichung eine gültige Ungleichung für  $P_I$  ist.

- (e) Die meisten der Clique-Ungleichungen aus (1) definieren sogar Facets von  $P_I$ : Für  $S \subseteq V$  und  $1 \leq \alpha \leq n - 2$  wird die Ungleichung (1) für alle Inzidenzvektoren von Cliques  $C \subseteq V$  mit  $|C \cap S| \in \{\alpha, \alpha + 1\}$  mit Gleichheit erfüllt, und die Dimension der affinen Hülle dieser Inzidenzvektoren ist  $\dim(P_I) - 1$ , d.h. die affine Hülle ist eine Hyperebene im  $\mathbb{R}^{V \cup E}$ .

Zeigen Sie diese Aussage für die Spezialfälle  $S = V, \alpha = 1$  sowie  $S \subseteq V, \alpha = 1$ .

- (f) Seien  $S, T \subseteq V$  mit  $S \cap T = \emptyset$ . Die korrespondierende *Schnitt-Ungleichung* lautet

$$x(S) + y(S) + y(T) - y(S, T) \geq 0.$$

Beweisen Sie, daß jede Schnitt-Ungleichung eine gültige Ungleichung für  $P_I$  ist. (14 Punkte)

### Aufgabe 3:

Zeigen Sie, daß die in Kapitel 1.8 vorgestellte Branch-and-Bound-Methode kein polynomieller Algorithmus ist, d.h. die Laufzeit der Branch-and-Bound-Methode ist nicht polynomiell beschränkt durch die Größe ihres Inputs.

*Hinweis:*

Betrachten Sie das folgende ganzzahlige lineare Programm  $ILP_t$  für  $t \in \mathbb{N}$ :

$$\max\{\eta : 2^t \xi = (2^t + 1)\eta; 0 \leq \xi \leq 2^t; \xi, \eta \in \mathbb{Z}\}.$$

Zeigen Sie, daß im  $k$ -ten Schritt der Branch-and-Bound Methode eines der paarweise disjunkten Polyeder die folgende Menge als Untermenge enthält:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} : 2^t \xi = (2^t + 1)\eta; 0 \leq \eta \leq 2^t - k \right\}.$$

(4 Punkte)

Abgabe: Freitag, 17. Juni 2004, vor der Vorlesung.