Sommersemester 2009
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
7. Übung

1. Gegeben seien ein Graph G und eine Kante $e = \{v, w\} \in E(G)$. H ist eine Unterteilung von G durch e, wenn $V(H) = V(G) \cup \{x\}$ und $E(H) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$. Ein Graph, der aus G durch sukzessives Unterteilen von Kanten entsteht, heißt Unterteilung von G.
   (a) Wenn H eine Unterteilung von G enthält, dann ist G ein Minor von H. Umgekehrt ist dies nicht der Fall.
   (b) Wenn ein Graph den $K_{3,3}$ oder den K_5 als Minor enthält, dann enthält er auch eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5.
   (c) Man folgere, daß ein Graph genau dann planar ist, wenn kein Subgraph eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 ist. (4 Punkte)

2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter einfacher Graph. Der Liniengraph von G ist definiert als Graph $L(G) = (E, F)$, wobei $F = \{\{e, e'\} \subseteq E \mid |e \cap e'| = 1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Wenn G planar ist, dann ist auch der Liniengraph von G planar.
   (b) Wenn der Liniengraph von G planar ist, dann ist auch G planar. (4 Punkte)

3. Betrachten Sie den Greedy-Knotenfärbungsalgorithmus, in dem die Knoten in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen werden und jeder Knoten die kleinste noch nicht an seinen schon gefärbten Nachbarn benutzte Farbe bekommt. Zeigen Sie, daß es für jedes n einen Graphen G mit $|V(G)| = 2n$ und $\chi(G) = 2$ gibt, so daß, wenn die Knoten in einer geeigneten Reihenfolge durchlaufen werden, der Greedy-Algorithmus n Farben benötigt. Zeigen Sie umgekehrt, daß es für jeden Graphen G eine Sortierung der Knoten gibt, so daß, wenn der Greedy-Algorithmus die Knoten in dieser Reihenfolge betrachtet, er nur $\chi(G)$ Farben benötigt. (4 Punkte)

4. Sei G ein Graph mit n Knoten. Zeigen Sie daß $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 18.6.2008, **vor** der Vorlesung.