

Kombinatorik, Graphen, Matroide

2. Übung

1. Zeigen Sie durch ein kombinatorisches Argument, daß für $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$kS_{n,k} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} S_{n-i,k-1}.$$

(4 Punkte)

2. Zeigen Sie:

(a) $s_{n+1,k+1} = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} s_{n,i},$

(b) $S_{n+1,k+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S_{i,k}.$

(4 Punkte)

3. Es sei $B_0 = 1$ und $B_n = \sum_{k=0}^n S_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

(4 Punkte)

4. Gegeben sei eine Permutation $a_1 a_2 \dots a_n$ von $\{1, \dots, n\}$. Eine *Inversion* ist ein Paar a_i, a_j mit $i < j$ aber $a_i > a_j$. Zum Beispiel hat 14352 die Inversionen $4,3$; $4,2$; $3,2$; $5,2$. Es sei $I_{n,k}$ die Zahl der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ mit genau k Inversionen. Zeigen Sie:

(a) $I_{n,0} = 1.$

(b) $I_{n,k} = I_{n, \binom{n}{2} - k}$ für $k = 0, \dots, \binom{n}{2}.$

(c) $I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$ für $k < n$. Gilt dies auch für $k = n$?

(d) $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} (-1)^k I_{n,k} = 0$ für $n \geq 2.$

(4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 21.4.2010, vor der Vorlesung.