

Kombinatorik, Graphen, Matroide

5. Übung

1. Für Konstanten $b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b \neq d$ sei die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ gegeben durch $a_n = ba_{n-1} + cd^{n-1}$ für $n \geq 1$ und $a_0 = 0$. Finden Sie eine geschlossene Formel zur Berechnung der Folgenglieder. (4 Punkte)

2. Bestimmen Sie die Zahl y_n der Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{1, 2, 3\}$, die eine gerade Anzahl von Einsen und eine ungerade Anzahl von Zweien enthalten. (4 Punkte)

Hinweis: Benutzen Sie die vorige Aufgabe.

3. Es sei $C_0 = 0$, und für $n > 0$ sei C_n die Zahl der Möglichkeiten, ein Produkt $a_1 a_2 \dots a_n$ zu klammern. Beispielsweise ist $C_4 = 5$, da es genau die 5 Möglichkeiten $((a_1 a_2) a_3) a_4$, $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$, $a_1((a_2 a_3) a_4)$, $a_1(a_2(a_3 a_4))$, $(a_1(a_2 a_3)) a_4$ gibt.

(a) Zeigen Sie, daß für $n > 1$ gilt: $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$.

(b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $G(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n$. (4 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie $G(z)^2$.

4. Betrachten Sie den Greedy-Knotenfärbungsalgorithmus, in dem die Knoten in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen werden und jeder Knoten die kleinste noch nicht an seinen schon gefärbten Nachbarn benutzte Farbe bekommt. Zeigen Sie, daß es für jedes n einen Graphen G mit $|V(G)| = 2n$ und $\chi(G) = 2$ gibt, so daß, wenn die Knoten in einer geeigneten Reihenfolge durchlaufen werden, der Greedy-Algorithmus n Farben benötigt. Zeigen Sie umgekehrt, daß es für jeden Graphen G eine Sortierung der Knoten gibt, so daß, wenn der Greedy-Algorithmus die Knoten in dieser Reihenfolge betrachtet, er nur $\chi(G)$ Farben benötigt. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 12.5.2010, vor der Vorlesung.