

## Kombinatorik, Graphen, Matroide

## 5. Übung

1. Für Konstanten  $b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $b \neq d$  sei die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  gegeben durch  $a_n = ba_{n-1} + cd^{n-1}$  für  $n \geq 1$  und  $a_0 = 0$ . Finden Sie eine geschlossene Formel zur Berechnung der Folgenglieder. (4 Punkte)

2. Bestimmen Sie die Zahl  $y_n$  der Wörter der Länge  $n$  über dem Alphabet  $\{1, 2, 3\}$ , die eine gerade Anzahl von Einsen und eine ungerade Anzahl von Zweien enthalten. (4 Punkte)

Hinweis: Benutzen Sie die vorige Aufgabe.

3. Es sei  $C_0 = 0$ , und für  $n > 0$  sei  $C_n$  die Zahl der Möglichkeiten, ein Produkt  $a_1 a_2 \dots a_n$  zu klammern. Beispielsweise ist  $C_4 = 5$ , da es genau die 5 Möglichkeiten  $((a_1 a_2) a_3) a_4$ ,  $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$ ,  $a_1((a_2 a_3) a_4)$ ,  $a_1(a_2(a_3 a_4))$ ,  $(a_1(a_2 a_3)) a_4$  gibt.

(a) Zeigen Sie, daß für  $n > 1$  gilt:  $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$ .

(b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion  $G(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n$ . (4 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie  $G(z)^2$ .

4. Betrachten Sie den Greedy-Knotenfärbungsalgorithmus, in dem die Knoten in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen werden und jeder Knoten die kleinste noch nicht an seinen schon gefärbten Nachbarn benutzte Farbe bekommt. Zeigen Sie, daß es für jedes  $n$  einen Graphen  $G$  mit  $|V(G)| = 2n$  und  $\chi(G) = 2$  gibt, so daß, wenn die Knoten in einer geeigneten Reihenfolge durchlaufen werden, der Greedy-Algorithmus  $n$  Farben benötigt. Zeigen Sie umgekehrt, daß es für jeden Graphen  $G$  eine Sortierung der Knoten gibt, so daß, wenn der Greedy-Algorithmus die Knoten in dieser Reihenfolge betrachtet, er nur  $\chi(G)$  Farben benötigt. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 12.5.2010, vor der Vorlesung.