

Kombinatorik, Graphen, Matroide

7. Übung

1. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| = n$ und $|E(G)| = m$. Für $t \in \mathbb{N}$ sei $p_G(t)$ die Zahl der verschiedenen zulässigen Knotenfärbungen von G mit den Farben $\{1, \dots, t\}$. Dabei betrachten wir zwei Knotenfärbungen als verschieden, wenn es mindestens einen Knoten gibt, dem sie unterschiedliche Farben zuordnen. Zeigen Sie, daß die Abbildung $p_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ein Polynom vom Grad n ist, in dem t^n den Koeffizienten 1 und t^{n-1} den Koeffizienten $-m$ hat. (4 Punkte)

Hinweis: Induktion in der Zahl der Kanten. Für den Induktionsschritt überlegen Sie sich, was passiert, wenn Sie eine Kante löschen oder kontrahieren.

2. Für einen Graphen G sei $\sigma(G)$ die Zahl der Möglichkeiten seine Kanten so zu orientieren, daß kein gerichteter Kreis entsteht. Zeigen Sie, daß dann gilt: $\sigma(G) = |p_G(-1)|$, wobei p_G das Polynom aus Aufgabe 1 sei (bzw. seine Erweiterung auf \mathbb{R}). (4 Punkte)

Hinweis: Auch hier empfiehlt sich eine Induktion in der Kantenzahl.

3. Zeigen Sie, daß es genau fünf Platonische Körper gibt, d.h. daß es (bis auf Isomorphie) genau fünf 3-zusammenhängende reguläre planare Graphen gibt, deren Flächen alle von Kreisen derselben Länge berandet werden. (4 Punkte)

4. Betrachten Sie folgendes Spiel: Gegeben sei ein leerer Graph mit n_0 Knoten, der planar in die Ebene eingebettet ist. Spieler A und Spieler B führen nun abwechselnd Züge der folgenden Art durch: In jedem Zug werden zwei verschiedene Knoten, die jeweils höchstens Grad 2 haben, durch einen Weg der Länge zwei verbunden, der jeweils über einen neu hinzugefügten Knoten führt. Der neu hinzugefügte Weg ist dabei so in die Ebene einzubetten, daß sich mit den schon eingebetteten Knoten und Kanten eine planare Einbettung des erweiterten Graphen ergibt. Spieler A beginnt, und es gewinnt der Spieler, der den letzten Zug ausführt. Kann dieses Spiel beliebig lang fortgesetzt werden? Für welchen Spieler gibt es für $n_0 = 2$ eine Gewinnstrategie? (4 Punkte)