Sommersemester 2012
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
2. Übung

1. Es sei $B_0 = 1$ und $B_n = \sum_{k=0}^n S_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
(4 Punkte)

2. Zeigen Sie:
   (a) $s_{n+1,k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} s_{n,i}$,
   (b) $S_{n+1,k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k}$. (4 Punkte)

3. Gegeben sei eine Permutation $a_1 a_2 \dots a_n$ von $\{1, \dots, n\}$. Eine *Inversion* ist ein Paar a_i, a_j mit $i < j$ aber $a_i > a_j$. Zum Beispiel hat $1\,4\,3\,5\,2$ die Inversionen 4,3; 4,2: 3,2; 5,2. Es sei $I_{n,k}$ die Zahl der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ mit genau k Inversionen. Zeigen Sie:
   (a) $I_{n,0} = 1$.
   (b) $I_{n,k} = I_{n,\binom{n}{2}-k}$ für $k = 0, \dots, \binom{n}{2}$.
   (c) $I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$ für $k < n$. Gilt dies auch für $k = n$?
   (d) $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} (-1)^k I_{n,k} = 0$ für $n \geq 2$. (4 Punkte)

4. Für $m, n \in \mathbb{N}$ definieren wir $X_n := \{1, \dots, n\}$ und
$$A_{n,m} := \left| \left\{ \pi : X_n \to X_n : \pi \text{ Permutation und } |\{i \in X_n \setminus \{n\} : \pi(i) < \pi(i+1)\}| = m \right\} \right|.$$
Außerdem sei $A_{0,0} := 1$ und $A_{0,k} := 0$ (für $k > 0$). Zeigen Sie, wie man $A_{n,m}$ für $n > 0$ und $m > 0$ aus $A_{n-1,m-1}$ und $A_{n-1,m}$ durch eine konstante Anzahl von Rechenoperationen bestimmen kann. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 17.4.2012, **vor** der Vorlesung.