

Kombinatorik, Graphen, Matroide

5. Übung

1. Für Konstanten $b, c, d \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ gegeben durch $a_n = ba_{n-1} + cd^{n-1}$ für $n \geq 1$ und $a_0 = 0$. Finden Sie eine geschlossene Formel zur Berechnung der Folgeglieder. (4 Punkte)
2. Es sei $C_0 = 0$, und für $n > 0$ sei C_n die Zahl der Möglichkeiten, ein Produkt $a_1 a_2 \dots a_n$ zu klammern. Beispielsweise ist $C_4 = 5$, da es genau die 5 Möglichkeiten $((a_1 a_2) a_3) a_4$, $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$, $a_1((a_2 a_3) a_4)$, $a_1(a_2(a_3 a_4))$, $(a_1(a_2 a_3)) a_4$ gibt.
 - (a) Zeigen Sie, daß für $n > 1$ gilt: $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$.
 - (b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $G(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n$. (4 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie $G(z)^2$.
3. Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alle Möglichkeiten, in $2n$ Schritten von $(0, 0)$ nach (n, n) zu laufen, wobei man in jedem Schritt von einem Punkt $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu einem Punkt $(i', j') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ laufen kann, falls gilt: $|i - i'| + |j - j'| = 1$ und $j' \geq i'$. Man kann also stets nur einen Schritt nach rechts oder nach oben machen und nie unter die Diagonale $x = y$ laufen. Es sei D_n die Zahl solcher Wege.
 - (a) Zeigen Sie, daß $D_n = C_{n+1}$ für $n \geq 1$ gilt, wobei C_n wie in Aufgabe 2 definiert sei.
 - (b) Beweisen Sie $D_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ für $n \geq 1$. (4 Punkte)