

Kombinatorik, Graphen, Matroide

7. Übung

1. Eine *Triangulation* ist ein planarer Graph zusammen mit einer planaren Einbettung, in der jedes Gebiet durch ein Dreieck berandet ist. Gibt es Triangulationen, in denen genau zwei Knoten ungeraden Grad haben und in denen diese beiden Knoten benachbart sind? (4 Punkte)
2. Welches ist das kleinste n , so daß es einen nichtplanaren einfachen Graphen G mit n Knoten gibt, dessen Komplement \bar{G} ebenfalls nicht planar ist? Dabei seien in \bar{G} zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie in G nicht verbunden sind. (4 Punkte)
3. Gegeben seien ein Graph G und eine Kante $e = \{v, w\} \in E(G)$. H ist eine Unterteilung von G durch e , wenn $V(H) = V(G) \cup \{x\}$ und $E(H) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$. Ein Graph, der aus G durch sukzessives Unterteilen von Kanten entsteht, heißt Unterteilung von G .
 - (a) Wenn H eine Unterteilung von G enthält, dann ist G ein Minor von H . Umgekehrt ist dies nicht der Fall.
 - (b) Wenn ein Graph den $K_{3,3}$ oder den K_5 als Minor enthält, dann enthält er auch eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 .
 - (c) Man folgere, daß ein Graph genau dann planar ist, wenn kein Subgraph eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 ist. (4 Punkte)
4. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter einfacher Graph. Der Liniengraph von G ist definiert als Graph $L(G) = (E, F)$, wobei $F = \{\{e, e'\} \subseteq E \mid |e \cap e'| = 1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
 - (a) Wenn G planar ist, dann ist auch der Liniengraph von G planar.
 - (b) Wenn der Liniengraph von G planar ist, dann ist auch G planar. (4 Punkte)