Sommersemester 2013
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

# Kombinatorik, Graphen, Matroide
## 8. Übung

1. Ein ungerichteter planarer Graph $G$ heißt *selbstdual*, wenn es eine Einbettung von $G$ gibt, so daß $G$ in bezug auf diese Einbettung isomorph zu $G^*$ ist.

   (a) Welche regulären selbstdualen Graphen gibt es?

   (b) Gibt es (bezüglich der Knotenzahl) beliebig große selbstduale Graphen? (4 Punkte)

2. Sei $G$ ein Graph mit $m$ Kanten. Dann gilt:

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

(4 Punkte)

3. Zeigen Sie, daß jeder kreisplanare Graph (siehe Aufgabe 3 des vorigen Zettels) eine Knotenfärbung mit höchstens drei Farben besitzt. (4 Punkte)

4. Für einen einfachen Graphen $G$ sei $t(G)$ die kleinste Zahl, für die es planare Graphen $G_1, \ldots, G_{t(G)}$ gibt, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

   - $V(G_i) = V(G)$ $(i \in \{1, \ldots, t(G)\})$,
   - $E(G) = \bigcup_{i=1}^{t(G)} E(G_i)$.

   Ein Graph $G$ ist also genau dann planar, wenn $t(G) = 1$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, daß $t(K_n) \geq \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, daß es Graphen $G$ mit $t(G) = 2$ und $\chi(G) = 8$ gibt.

   (c) Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für den folgenden Wert an:

$$\max\{\chi(G) \mid t(G) = 2\}.$$

   Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schranke. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 11.6.2013, vor der Vorlesung.