Sommersemester 2015
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
6. Übung

1. Zeigen Sie, daß es genau fünf Platonische Körper gibt, d.h. daß es (bis auf Isomorphie) genau fünf 3-zusammenhängende reguläre planare Graphen gibt, deren Flächen alle von Kreisen derselben Länge berandet werden. (4 Punkte)

2. Betrachten Sie folgendes Spiel: Gegeben sei ein leerer Graph mit n_0 Knoten, der planar in die Ebene eingebettet ist. Spieler A und Spieler B führen nun abwechselnd Züge der folgenden Art durch: In jedem Zug werden zwei verschiedene Knoten, die jeweils höchstens Grad 2 haben, durch einen Weg der Länge zwei verbunden, der jeweils über einen neu hinzugefügten Knoten führt. Der neu hinzugefügte Weg ist dabei so in die Ebene einzubetten, daß sich mit den schon eingebetteten Knoten und Kanten eine planare Einbettung des erweiterten Graphen ergibt. Spieler A beginnt, und es gewinnt der Spieler, der den letzten Zug ausführt.

   (a) Zeigen Sie, daß dieses Spiel nicht beliebig lange fortgesetzt werden kann, und geben Sie (in Abhängigkeit von n_0) ein möglichst gut obere Schranke für die Zahl der maximal möglichen Spielzüge an.

   (b) Für welchen Spieler gibt es für $n_0 = 2$ eine Gewinnstrategie? (2+2 Punkte)

3. Eine *Triangulation* ist ein planarer Graph zusammen mit einer planaren Einbettung, in der jedes Gebiet durch ein Dreieck berandet ist. Für die Knotenmenge V einer Triangulation sei eine Abbildung $l : V \to \{1, 2, 3\}$ gegeben. Eine Fläche der Triangulation heiße dreifarbig, wenn an ihren drei Eckknoten alle drei verschiedenen Knotenlabel 1, 2 und 3 vorkommen. Zeigen Sie, daß es dann eine gerade Anzahl von dreifarbigen Flächen geben muß. (3 Punkte)

4. Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Für jede unendliche Folge $G_1, G_2 \ldots$ von Graphen gibt es zwei Indizes $i < j$, so daß G_i ein Minor von G_j ist.

   (b) Sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Graphen, die bezüglich Minorenbildung abgeschlossen ist, d.h. für jedes $G \in \mathcal{G}$ ist auch jeder Minor von G in $\mathcal{G}$ enthalten. Dann gibt es eine endliche Menge $\mathcal{X}$ von Graphen, so daß $\mathcal{G}$ aus genau den Graphen besteht, die kein Element von $\mathcal{X}$ als Minor enthalten. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 2.6.2015, vor der Vorlesung.