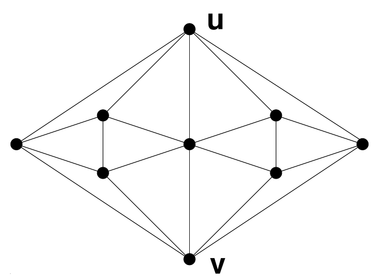
Sommersemester 2016
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
9. Übung

1. Betrachten Sie den folgenden Graph:



   (a) Geben Sie Farblisten für die Knoten an, die für u und v aus je einem Element und für alle anderen Knoten aus je vier Elementen bestehen, so dass es für diese Listen keine zulässige Listenfärbung gibt.

   (b) Folgern Sie aus (a), dass es planare Graphen gibt, deren listenchromatische Zahl größer als vier ist. (3+2 Punkte)

2. Bei welchen zusammenhängenden Graphen ist die chromatische Zahl größer als der chromatische Index? (2 Punkte)

3. Für einen ungerichteten Graph G und $t \in \mathbb{N}$ sei $p_G(t)$ die Zahl der verschiedenen zulässigen Knotenfärbungen von G mit den Farben $\{1, \ldots, t\}$. Dabei betrachten wir zwei Knotenfärbungen als verschieden, wenn es mindestens einen Knoten gibt, dem sie unterschiedliche Farben zuordnen.

   (a) Zeigen Sie, dass für jeden Graphen G die Abbildung $p_G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein Polynom vom Grad $n = |V(G)|$ ist. Wie lautet der Koeffizient von t^n?

   (b) Bestimmen Sie p_G für den Fall, dass G ein Baum ist.

   (c) Wie sieht p_G aus, wenn G ein Wald ist, der aus k Zusammenhangskomponenten besteht? (3+2+1 Punkte)

   Hinweis zu (a): Betrachten Sie zunächst vollständige Graphen. Bei Graphen, in dem es zwei Knoten v und w gibt, die nicht durch eine Kante verbunden sind, können Sie sich dann überlegen, was passiert, wenn Sie v und w durch eine zusätzliche Kante verbinden oder $\{v, w\}$ kontrahieren.

4. Für einen Graphen G sei $\sigma(G)$ die Zahl der Möglichkeiten seine Kanten so zu orientieren, dass kein gerichteter Kreis entsteht. Zeigen Sie, dass dann gilt: $\sigma(G) = |p_G(-1)|$, wobei p_G das Polynom aus Aufgabe 3 sei. (3 Punkte)

   Hinweis: Induktion in der Kantenzahl. Überlegen Sie sich dazu eine geeignete Rekursionsformel zur Berechnung von $\sigma(G)$.

Abgabe: Donnerstag, den 23.6.2016, vor der Vorlesung.