Sommersemester 2016
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
10. Übung

1. Es sei G ein einfacher ungerichteter Graph, und es sei

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq E(G) \mid |X \cap E(G[S])| \leq |S| \text{ für alle } S \subseteq V(G)\}.$$

   Zeigen Sie, dass $(E(G), \mathcal{F})$ ein Matroid ist. (4 Punkte)

2. Es sei $\mathcal{S}$ eine endliche Familie von endlichen (nicht notwendigerweise paarweise verschiedenen) Mengen. Eine Menge T ist eine *Transversale* von $\mathcal{S}$, falls eine Bijektion $\Phi : T \to \mathcal{S}$ existiert mit $t \in \Phi(t)$ für alle $t \in T$. Nehmen Sie an, dass $\mathcal{S}$ mindestens eine Transversale besitzt, und zeigen Sie, dass die Menge aller Transversalen von $\mathcal{S}$ die Menge der Basen eines Matroiden ist (des sogenannten *transversalen Matroids*). (4 Punkte)

3. Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^E$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ genau dann die Menge der Basen eines Matroids ist, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

   (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

   (B2)' Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1$ gibt es ein Element $y \in B_2$, so dass $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

   (B3) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gilt $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$. (4 Punkte)

4. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, und es sei $T \subseteq E$. Die Abbildung $r' : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sei wie folgt definiert: Für $X \subseteq E$ sei $r'(X) = r(X \cup T) - r(T)$. Zeigen Sie, dass r' die Rangfunktion eines Matroids ist. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 30.6.2016, vor der Vorlesung.