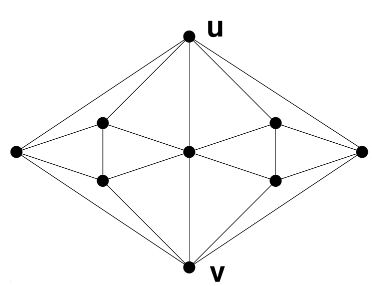
Kombinatorik, Graphen, Matroide
8. Übung

1. Zeigen Sie, dass es in jedem Graphen G einen Weg mit mindestens $\chi(G)-1$ Kanten geben muss. (3 Punkte)

2. Sei G ein Graph mit n Knoten. Zeigen Sie, dass $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$ gilt. Dabei ist $\bar{G}$ der Komplementgraph von G, also der Graph mit derselben Knotenmenge wie G, in dem zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie es in G nicht sind. (3 Punkte)

3. Betrachten Sie den folgenden Graph:



   (a) Geben Sie Farblisten für die Knoten an, die für u und v aus je einem Element und für alle anderen Knoten aus je vier Elementen bestehen, so dass es für diese Listen keine zulässige Listenfärbung gibt.

   (b) Folgern Sie aus (a), dass es planare Graphen gibt, deren listenchromatische Zahl größer als vier ist. (3+2 Punkte)

4. Betrachten Sie sich den folgenden **falschen** Beweis des Vierfarbensatzes:

   Wir beweisen per Induktion in der Knotenzahl, dass für jeden planaren Graphen G gilt: $\chi(G) \leq 4$. Der Induktionsanfang $|V(G)| = 1$ ist trivial, sei also $|V(G)| > 1$, und wir betrachten eine feste planare Einbettung von G. Es sei x ein Knoten von G mit minimalem Grad. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $|\delta_G(x)| \leq 5$ gilt. Die Induktionsvoraussetzung liefert eine zulässige Knotenfärbung $f : V(G) \setminus \{x\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ von $G - x$. Wenn es eine Farbe aus $\{1, 2, 3, 4\}$ gibt, die von f bei den Nachbarn von x nicht verwendet wird, können wir x mit einer solchen Farbe färben und haben so eine zulässige 4-Färbung von G. Also nehmen wir an, dass alle vier Farben bei den Nachbarn von x vorkommen. Insbesondere gilt also $|\delta_G(x)| \in \{4, 5\}$. Wie im Beweis des Fünffarbensatzes aus der Vorlesung seien die Nachbarn von x in Bezug auf die Einbettung zyklisch durchnumeriert (siehe Abbildung 1 (a) für den Fall $|\delta_G(x)| = 5$). Ebenso betrachten wir wie in der Vorlesung für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ den Graphen $H_{i,j} = G[\{v \in V(G) \setminus \{x\} : f(v) \in \{i, j\}]$.

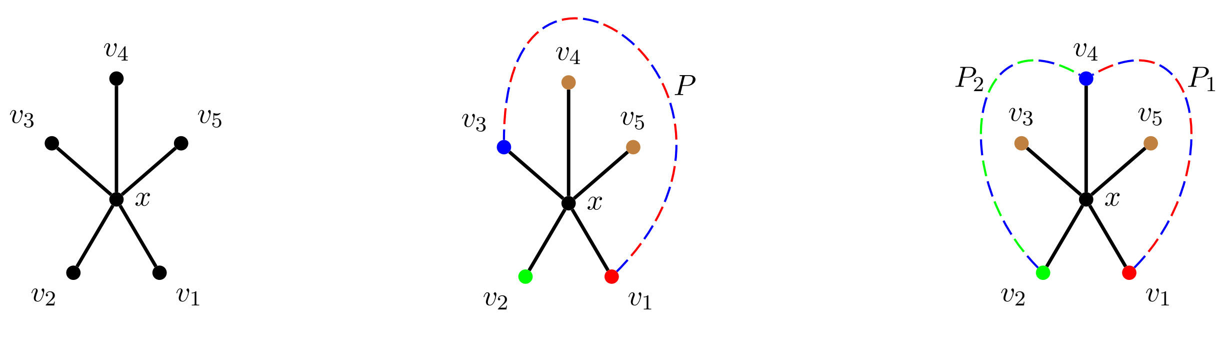
   Sei zunächst $|\delta_G(x)| = 4$. Der Fall funktioniert analog zur Vorlesung: O.B.d.A. gelte $f(v_i) = i$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Wenn es in $H_{1,3}$ keinen v_1-v_3-Weg gibt, können wir in der Zusammenhangskomponente von v_1 in $H_{1,3}$ die Farben 1 und 3 vertauschen. Anschließend ist die Farbe 1 für x übrig, und wir sind fertig. Wenn es aber einen v_1-v_3-Weg P in $H_{1,3}$ gibt, dann bildet P zusammen mit den Kanten $\{x, v_1\}$ und $\{x, v_3\}$ einen Kreis, der v_2 und v_4 trennt. Also gibt es in $H_{2,4}$ keinen v_2-v_4-Weg, weshalb wir in der Zusammenhangskomponente von v_2 in $H_{2,4}$ die Farben 2 und 4 vertauschen, wodurch wir die Farbe 2 für x übrig haben und wieder fertig sind.

Sei also $|\delta_G(x)| = 5$. Genau zwei der Nachbarn von x erhalten also unter f dieselbe Farbe. Diese können in der zyklischen Ordnung nebeneinander liegen oder nicht.

Wenn sie nebeneinander liegen, können wir o.B.d.A. $f(v_4) = f(v_5)$ annehmen. Es sei wieder $f(v_i) = i$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Wie im Fall $|\delta_G(x)| = 4$ können wir annehmen, dass es in $H_{1,3}$ einen v_1-v_3-Weg P gibt (siehe Abbildung 1 (b)). Dann gibt es in $H_{2,4}$ aber weder einen v_2-v_4-Weg noch einen v_2-v_5-Weg. Also können wir in der Zusammenhangskomponente von v_2 in $H_{2,4}$ die Farben 2 und 4 vertauschen, wodurch wieder die Farbe 2 für x frei wird, und wieder sind wir fertig.

Es bleibt der Fall, dass die gleich-gefärbten Nachbarn von x in der zyklischen Ordnung nicht nebeneinander liegen. O.B.d.A. gelte $f(v_3) = f(v_5)$. Wieder gelte $f(v_i) = i$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (also $f(v_5) = 3$). Es muss in $H_{1,4}$ einen v_1-v_4-Weg P_1 geben, sonst könnten wir wieder die Farbe 1 für x frei machen. Ebenso muss es in $H_{2,4}$ einen v_2-v_4-Weg P_2 geben (siehe Abbildung 1 (c)). Der Weg P_1 sorgt aber dafür, dass es in $H_{2,3}$ keinen v_2-v_5-Weg gibt, daher können wir in der Zusammenhangskomponente von v_5 in $H_{2,3}$ die Farben 2 und 3 vertauschen, wonach v_5 nicht mehr mit der Farbe 3, sondern mit der Farbe 2 gefärbt ist. Der Weg P_2 bewirkt, dass es in $H_{1,3}$ keinen v_1-v_3-Weg gibt, daher können wir in der Zusammenhangskomponente von v_3 in $H_{1,3}$ die Farben 1 und 3 vertauschen, wonach v_3 nicht mehr die Farbe 3, sondern die Farbe 1 hat. Die Farbe 3 kommt dann an den Nachbarn von x nicht mehr vor, wodurch wir wieder eine Farbe für x gewonnen haben.

Wo ist der Fehler im Beweis? (5 Punkte)



(a) (b) (c)

Abbildung 1: Aufgabe 4

Homepage der Übung:
`http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ss17/kgm_uebung_ss17.html`

Abgabe: Donnerstag, 22.6.2017, vor der Vorlesung.