Sommersemester 2018
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
4. Übung

1. Es sei k eine positive ganze Zahl. Für einen Graphen G sei

$$\mathcal{F}_G = \{F \subseteq E(G) \mid \Delta((V(G), F)) \leq k\},$$

wobei $\Delta((V(G), F))$ der maximale Knotengrad in $(V(G), F)$ sei.

(a) Zeigen Sie, dass $(E(G), \mathcal{F}_G)$ immer ein Unabhängigkeitssystem ist, aber im allgemeinen kein Matroid.

(b) Betrachten Sie das Problem, zu einem gegebenen Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ eine Menge $F \in \mathcal{F}_G$ zu finden, die $\sum_{e \in F} c(e)$ maximiert. Zeigen Sie, dass der Best-In-Greedy für dieses Optimierungsproblem eine Lösung findet, die höchstens um den Faktor 2 schlechter ist als eine optimale Lösung. (2+2 Punkte)

2. Es sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid mit Rangfunktion r, E' eine endliche Menge und $f : E \to E'$. Außerdem sei $\mathcal{F}' := \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Man beweise:

(a) $(E', \mathcal{F}')$ ist ein Matroid.

(b) Die Rangfunktion r' von $(E', \mathcal{F}')$ wird gegeben durch

$$r(X) \;=\; \min\left\{|X \setminus W| + r\big(f^{-1}(W)\big) : W \subseteq X\right\}$$

für alle $X \subseteq E'$. (2+4 Punkte)

3. Zu einem gerichteten Graph G soll ein Teilgraph H gefunden werden, der eine Vereinigung von knotendisjunkten Wegen und Kreisen ist, so dass $|E(H)|$ maximal ist. Zeigen Sie, dass es für dieses Problem einen polynomiellen Algorithmus gibt. (2 Punkte)

Homepage der Übung:
`http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ss18/kgm_uebung_ss18.html`

Abgabe: Dienstag, den 8.5.2018, vor der Vorlesung.