Sommersemester 2018
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
8. Übung

1. Ein einfacher planarer Graph heiße *kreisplanar*, wenn er so eingebettet werden kann, dass es eine Fläche gibt, die zu jedem Knoten inzident ist (d.h. jeder Knoten muss auf dem Rand dieser Fläche liegen). Zeigen Sie, dass ein einfacher Graph genau dann kreisplanar ist, wenn er weder den $K_{2,3}$ noch den K_4 als Minor enthält. (2 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Für jede unendliche Folge $G_1, G_2 \dots$ von Graphen gibt es zwei Indizes $i < j$, so dass G_i ein Minor von G_j ist.

   (b) Sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Graphen, die bezüglich Minorenbildung abgeschlossen ist, d.h. für jedes $G \in \mathcal{G}$ ist auch jeder Minor von G in $\mathcal{G}$ enthalten. Dann gibt es eine endliche Menge $\mathcal{X}$ von Graphen, so dass $\mathcal{G}$ aus genau den Graphen besteht, die kein Element von $\mathcal{X}$ als Minor enthalten. (4 Punkte)

3. Gegeben seien ein Graph G und eine Kante $e = \{v, w\} \in E(G)$. H ist eine Unterteilung von G durch e, wenn $V(H) = V(G) \dot{\cup} \{x\}$ und $E(H) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$. Ein Graph, der aus G durch sukzessives Unterteilen von Kanten entsteht, heißt Unterteilung von G.

   (a) Wenn H eine Unterteilung von G enthält, dann ist G ein Minor von H. Umgekehrt ist dies nicht der Fall.

   (b) Wenn ein Graph den $K_{3,3}$ oder den K_5 als Minor enthält, dann enthält er auch eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5.

   (c) Man folgere, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn kein Subgraph eine Unterteilung vom $K_{3,3}$ oder K_5 ist. (2+3+1 Punkte)

4. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter einfacher Graph. Der Liniengraph von G ist definiert als Graph $L(G) = (E, F)$, wobei $F = \{\{e, e'\} \subseteq E \mid |e \cap e'| = 1\}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Wenn G planar ist, dann ist auch der Liniengraph von G planar.

   (b) Wenn der Liniengraph von G planar ist, dann ist auch G planar. (2+2 Punkte)

Homepage der Übung:
`http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ss18/kgm_uebung_ss18.html`
Abgabe: Dienstag, den 12.6.2018, vor der Vorlesung.