Nächstes Ziel: Finde ein Zertifikat, das zeigt, dass ein Gleichungssystem *keine* ganzzahlige Lösung hat.

Definition

Eine $m \times n$-Matrix A ist in **Hermitescher Normalform**, wenn sie in der Form $A = \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}$ geschrieben werden kann, wobei B eine reguläre nicht-negative untere Dreiecksmatrix ist, sodass in jeder Zeile von B der Diagonaleintrag der größte Eintrag ist.

Die folgenden Modifikationen von Matrizen heißen **elementare unimodulare Spaltenoperationen**:

- Vertausche zwei Spalten.
- Multipliziere eine Spalte mit -1.
- Addiere ein ganzzahligen Vielfaches eines Spalte zu einer anderen Spalte.

Vorbesprechung Hauptseminar:

14.7., 18:15 Uhr

Theorem

Jede Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ mit Rang m kann duch eine Folge von unimodularen Spaltenoperationen in eine Matrix in Hermitescher Normalform gebracht werden.

Korollar

Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Dann hat $Ax = b$ genau dann eine ganzzahlige Lösung x, wenn $b^t y$ für jedes $y \in \mathbb{Q}^m$, für das $A^t y$ ganzzahlig ist, ganzzahlig ist.

Beweis: „$\Rightarrow$": Wenn x ganzzahlig mit $Ax = b$ ist und $y^t A$ ganzzahlig ist, dann ist $y^t A x = y^t b$ auch ganzzahlig.

ganz. ganz.

Beweis (Fortsetzung): "$\Leftarrow$":
Es sei $b^t y$ ganzzahlig für jedes $y \in \mathbb{Q}^m$, für das $A^t y$ ganzzahlig ist.

$\Rightarrow Ax = b$ muss zulässig sein, denn sonst gäbe es nach Farkas einen Vektor $y \in \mathbb{Q}^m$ mit $y^t A = 0$ und $y^t b = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Können annehmen: A hat Rang m.

Beobachtung: Die Aussage des Korollars gilt genau dann für A, wenn sie für eine Matrix $\tilde{A}$ gilt, die aus A durch Anwendung von elementaren unimodularen Spaltenoperationen hervorgeht.

$\Rightarrow$ Wir nehmen an, dass A in Hermitescher Normalform $A = [B\,0]$ ist.

$\Rightarrow B^{-1}A = B^{-1}\,[B\,0] = [I_m\,0]$ ist eine ganzzahlige Matrix.

$\Rightarrow$ Nach Voraussetzung (angewandt auf die Zeilen von B^{-1}) ist $B^{-1}b$ ganzzahlig.

Wegen $[B\,0]\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = b$ ist der Vektor $x := \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ eine ganzzahlige Lösung von $[B\,0]\,x = b$. $\square$

TDI-Systeme

Theorem

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) P ist ganzzahlig.

(b) Jede Fläche von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(c) Jede minimale Fläche von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(d) Jede Stützhyperebene von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(e) Jede rationale Stützhyperebene von P enthält mindestens einen ganzzahligen Vektor.

(f) $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ wird für jeden Vektor c, für den das Maximum endlich ist, von einem ganzzahligen Vektor angenommen.

(g) $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ ist für jeden Vektor c, für den das Maximum endlich ist, ganzzahlig.

Beweis: Leicht: „(6)⇔(c)", „(6)⇒(d)", „(d)⇒(e)",
„(f)⇒(g)".

„(a)⇒(b)": Sei P ganzzahlig.

Sei $F = P \cap H$ eine Fläche von P,
wobei: $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^t x = \delta\}$ eine stütz-
hyperebene von P sei. Obdi: sei $d = \max\{c^t x : x \in P\}$
⇒ Jedes $z \in F$ ist konvexkombination
von ganzzahligen Ecken $v_1, \dots, v_k \in P$.

Falls $v_i \in P \setminus F$, dann gibt es $c_i \neq 0$ für $i \in \{1, \dots, k\}$. Wegen $c_i \neq 0$ müsste es dann ein $j \in \{1, \dots, k\}$ mit $c_j \cdot v_j \in F$ geben.

$\Rightarrow$ Alle $v_1, \dots, v_k$ liegen in F.

$\Rightarrow$ F enthält eine ganzzahlige Lösung.

„(C) $\Rightarrow$ (A)": Folgt daraus, dass (innere Zielfunktionen) immer in einer Minimalfläche maximal werden.

"(1) $\Rightarrow$ (a)" Es sei (1), also $P \neq P_I$

$\Rightarrow$ Es gibt ein $x^* \in P \setminus P_I$.

P rational $\Rightarrow P_I$ ist Polyeder.

$\Rightarrow$ Es gibt eine Ungleichung $a^t x \leq \beta$,

die von den Ecken in P_I erfüllt

wird, aber nicht von x^*.

$\Rightarrow a^t x^* > \beta$

Widerspruch zu (1), weil $\max\{a^t x : x \in P\}$

endlich ist.

Wissen (a), (b), (c) und (f) sind äquivalent.

„(e) $\Rightarrow$ (c)" können wir annehmen: A, b ganzzahlig.

Sei $F := \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b'\}$ eine minimale Fläche von P, wobei $A'x \leq b'$ ein Teilsystem von $Ax \leq b$ sei.

Wenn es keinen ganzzahligen Vektor x mit $A'x = b'$ gibt, dann gibt es auch den ganzen Kegel einer rationalen

Vektor y, sodass $c := A^T y$ ganzzahlig ist, während $\delta := y^T b$ nicht ganzzahlig ist.

Wir können annehmen, dass alle Einträge von y positiv sind (sonst addiere einen geeigneten ganzzahligen Vektor zu y)

$\Rightarrow$ $H := \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$ enthält keine ganzzahligen Vektoren.

Wir zeigen $H \cap P = F$, indem wir folgt, dass

H eine Stützhyperebene von P ist,

die keine ganzzahligen Punkte enthält.

Nach Konstruktion gilt $F \subseteq H$

z.Z.: $H \cap P \subseteq F$. Sei $x \in H \cap P$.

$\Rightarrow y^t A' x = c^t x = d = y^t b'$

$\Rightarrow y^t (A' x - b') = 0$

und alle Einträge von y' sind ≥ 0,

folgt $A' x = b' \Rightarrow x \in F$.

„(5) ⇒ (e)" Sei: $H := \{x \in \mathbb{R}^n : c^t x = \delta\}$ eine

rationale Stützhyperebene an P mit

$\max\{c^t x : x \in P\} = \delta$.

Annahme: H enthält keinen ganzzahligen

Punkt.

Voriges Lem.

$\Rightarrow$ Es gibt ein $\gamma > 0$ mit γc ganz-

zahlig und $\gamma\delta$ nicht ganzzahlig.

$\Rightarrow \max\{\gamma c^t x : x \in P\} = \gamma \max\{c^t x : x \in P\}$

$= \gamma \cdot \delta \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ (5) ist nicht erfüllt. □

Definition:

Ein rationales Polyeder ist ein Polyeder, P

für das es eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, und

einen Vektor $b \in \mathbb{Q}^m$ mit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

gibt.