Separation $\rightarrow$ Optimierung

Theorem

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{Q}^n$. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales Polytop und sei $x_0 \in P$ eine Vektor im Inneren von P. Sei $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $\text{size}(x_0) \leq \log(T)$ und $\text{size}(x) \leq \log(T)$ für alle Ecken x von P gilt.

Zu gegebenen n,c, x_0, T und einem polynomiellen Separationsorakel für P kann eine Ecke x^* von P, in der das Maximum $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ angenommen wird, in einer Laufzeit gefunden werden, die polynomiell in n, $\log(T)$ und $\text{size}(c)$ ist.

Hier ohne Beweis

Theorem

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{Q}^n$. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales Polytop und sei $x_0 \in P$ eine Vektor im Inneren von P. Sei $T \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass $\mathrm{size}(x_0) \leq \log(T)$ und $\mathrm{size}(x) \leq \log(T)$ für alle Ecken x von P gilt.

Zu gegebenem n, y, x_0, T und einem Orakel, das zu einem gegebenem $c \in \mathbb{Q}^n$ eine Ecke x^* of P ausgibt, in der das Maximum $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ angenommen wird, können wir ein Separationsorakel für P und y mit einer Laufzeit, die polynomiell in n, $\log(T)$ und $\mathrm{size}(y)$ ist, implementieren. Falls $y \notin P$, können wir in dieser Laufzeit eine facettenbestimmende Ungleichung für P finden, die von y verletzt wird.

Hier ebenfalls ohne Beweis

Ganzzahlige Lineare Optimierung

Ganzzahlige Lineare Optimierung

Wir wissen: Ganzzahlige Lineare Optimierung ist NP-schwer.

$\Rightarrow$ Können nicht auf einen polynomiellen Algorithmus hoffen.

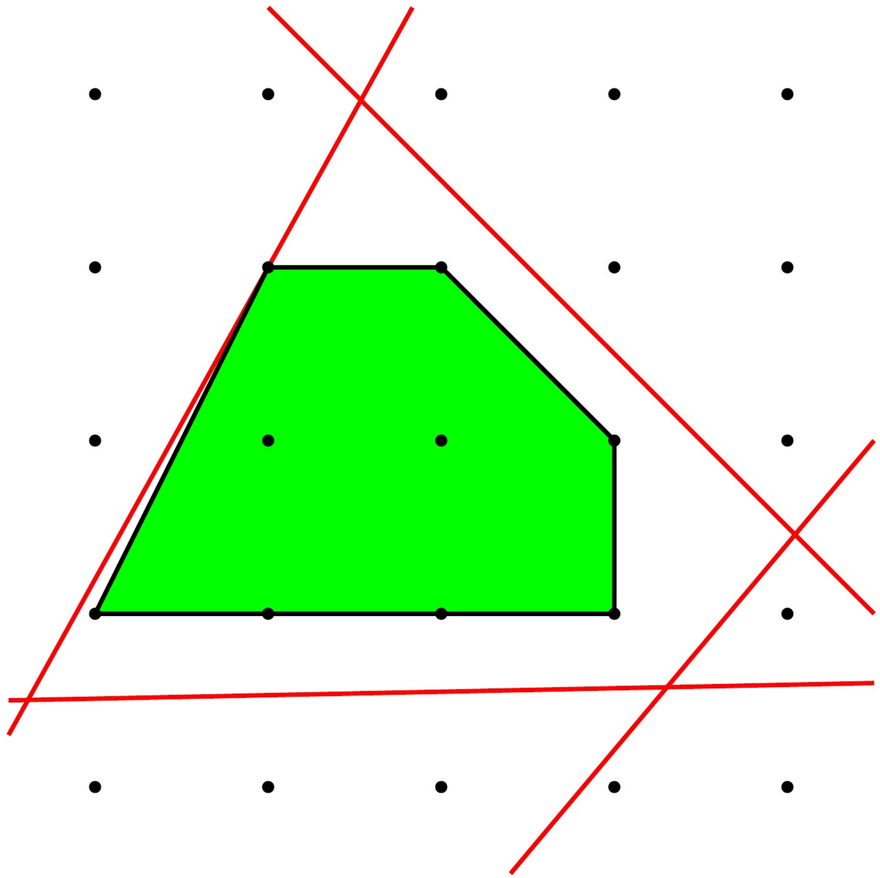
Aber: Man kann leicht komplexere Nebenbedingungen modellieren:

- "($x \geq a$ oder $y \geq b$) und $x, y \geq 0$" für Zahlen $a, b > 0$.
- "$x \in \{s_1, \ldots, s_k\}$" für eine Menge $\{s_1, \ldots, s_k\}$ von Zahlen.

Ganzzahlige Hülle

Definition:

Für ein Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ heißt
$P_I := \mathrm{conv}\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ **ganzzahlige Hülle** (**integer hull**) von P.



Ganzzahlige Hülle

Beobachtungen:

- Für einen rationalen polyedrischen Kegel (also einen Kegel $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$) gilt $C_I = C$ (Übung).
- P_I ist nicht unbedingt ein Polyeder (Übung).
- Falls P ein Polytop ist, dann ist P_I ein Polyeder.

Ganzzahlige Hülle

Theorem

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Dann ist P_I ein Polyeder.

<u>Beweis:</u> Wir wissen: P kann geschrieben werden als $P = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(E)$ für zwei endliche Menge V, E.
Und aus dem Beweis davon folgt, dass wir $V, E \subseteq \mathbb{Q}^n$ annehmen können.

$\Longrightarrow$ können sogar annehmen, dass

$E = \{y_1, \dots, y_s\}$ für ganzzahlige Vektoren

$y_1 \dots y_s$

Es sei: $B := \{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i y_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1$ für $i \in \{1,..,s\}\}$

<u>Behauptung:</u> $P_I = (\mathrm{conv}(V) + B)_I + \mathrm{cone}(E)$

<u>Beweis der Bh.:</u> „$P_I \subseteq (\mathrm{conv}(V) + B)_I + \mathrm{cone}(E)$":

Sei p ein ganzzahliger Vektor in P.

$\Longrightarrow p = q + c$ für ein $q \in \mathrm{conv}(V)$ und ein

$c \in \mathrm{cone}(E)$

schreibe c als $c = \sum_{i=1}^{s} \mu_i y_i$ mit $\mu_i \geq 0$

für $i = 1, \dots, s$

$$\Rightarrow c = \sum_{i=1}^{s} \mu_i y_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{s} (\mu_i - \lfloor \mu_i \rfloor) y_i}_{b := \in B} + \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \lfloor \mu_i \rfloor y_i}_{c' := \in \operatorname{cone}(E) \cap \mathbb{Z}^n}$$

$\Rightarrow p = (q + b) + c'$

$q + b \in \operatorname{conv}(V) + B$

und: $q + b = p - c' \in \mathbb{Z}^n$

$\Rightarrow q + b \in (\operatorname{conv}(V) + B)_I$

$\Rightarrow p \in (\operatorname{conv}(V) + B)_I + \operatorname{cone}(E)$

$\Rightarrow P_I \subseteq (\operatorname{conv}(V) + B)_I + \operatorname{cone}(E)$

„$P_I \supseteq (\mathrm{conv}(V)+B)_I + \mathrm{cone}(E)$“:

$$(\mathrm{conv}(V)+B)_I + \mathrm{cone}(E)$$

$$\subseteq P_I + \mathrm{cone}(E)$$

$$= P_I + (\mathrm{cone}(E))_I \subseteq (\underbrace{P + \mathrm{cone}(E)}_{=P})_I = P_I$$

↑ Übung

□ Behauptung.

Aus der Behauptung folgt das Theorem, da $\mathrm{conv}(V)+B$ ein Polytop und somit $(\mathrm{conv}(V)+B)_I$ ebenfalls. □

Definition

Ein Polyeder P heißt **ganzzahlig**, wenn $P = P_I$.

Satz

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$, sodass $P_I \neq \emptyset$. Sei $c \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $\max\{c^t x \mid x \in P\}$ ist genau dann beschränkt, wenn $\max\{c^t x \mid x \in P_I\}$ beschränkt ist.

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$“: trivial.

„$\Leftarrow$“: sei $\max\{c^t x : x \in P\}$ unbeschränkt.

$\Rightarrow$ Das duale LP ist unzulässig.

$\Rightarrow$ $y^t A = c,\ y \geq 0$ ist unzulässig.

Farkas
$\Rightarrow$ Es gibt einen Vektor z mit

$c^t z < 0,\ Az \geq 0$

$\Rightarrow$ Das LP $\min\{c^t x : Ax \geq 0,\ -\mathbb{1} \leq x \leq \underbrace{\mathbb{1}}_{(1,1,\dots,1)}\}$

ist zulässig und hat eine Optimallösung

mit negativem Wert.

$\Rightarrow$ Es gibt auch eine rationale

Optimallösung x^*

Nach Multiplikation von x^* mit dem Hauptnenner erhalten wir einen ganzzahligen Vektor w mit $Aw \geq 0$ und $c^t w < 0$.

$\Rightarrow$ Für jedes $v \in P_I$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $v - kw \in P_I$

$\Rightarrow$ $\max\{c^t x : x \in P_I\}$ ist unbeschränkt.

$\square$

Nächstes Ziel: Finde ein Zertifikat, das zeigt, dass ein Gleichungssystem *keine* ganzzahlige Lösung hat.

Definition

Eine $m \times n$-Matrix A ist in **Hermitescher Normalform**, wenn sie in der Form $A = [B\, 0]$ geschrieben werden kann, wobei B eine reguläre nicht-negative untere Dreiecksmatrix ist, sodass in jeder Zeile von B der Diagonaleintrag der größte Eintrag ist.

Die folgenden Modifikationen von Matrizen heißen **elementare unimodulare Spaltenoperationen**:

- Vertausche zwei Spalten.
- Multipliziere eine Spalte mit -1.
- Addiere ein ganzzahligen Vielfaches eine~~s~~ Spalte zu einer Spalte.

Theorem

Jede Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ mit Rang m kann duch eine Folge von unimodularen Spaltenoperationen in eine Matrix in Hermitescher Normalform gebracht werden.

Beweis: können annehmen, dass A ganzzahlig ist.

Wir nehmen an, dass wir A bereits in eine Matrix $\begin{bmatrix} F & 0 \\ G & H \end{bmatrix}$ transformiert haben, wobei F eine untere Dreiecksmatrix mit positiver Diagonale ist.

Die erste Zeile von H habe die Einträge $h_{11}, \dots, h_{1k}$.

Wende elementare unimodulare Spaltenoperationen an, sodass alle h_{1j} nicht-negativ sind und $\sum_{j=1}^{k} h_{1j}$ so klein wie möglich ist. O.B.d.A. sei $h_{11} \geq h_{12} \geq \dots \geq h_{1j}$.

$\Rightarrow h_{12} = \dots = h_{1j} = 0$, denn sonst, wenn $h_{12} \neq 0$ wäre, dann könnte man h_{12} von h_{11} abziehen und hätte $\sum_{j=1}^{k} h_{1j}$ verkleinert.

$\Rightarrow$ Am Ende erhalten wir eine Matrix
$[B\ 0]$, wobei B eine linke untere
Dreiecksmatrix mit positiven Diagonale
ist.

Bezeichne die Einträge in B mit b_{ij}
$(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,m)$

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix}$$

Führe zum Schluss für $i=2,\dots,m$
die folgende Schritte durch: Für $j=1,\dots,i-1$
addiere ein ganzzahliges Vielfaches der
i-ten Spalte zur j-ten Spalte von B, sodass

b_{ij} nicht-negativ und kleiner als b_{ii} ist. $\square$