Sommersemester 2022 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Dr. U. Brenner Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
5. Übung

1. Sei P ein Polyeder und F eine Fläche von P. Zeigen Sie, dass

$$\{c \mid c^t z = \max\{c^t x \mid x \in P\} \text{ für alle } z \in F\}$$

ein polyedrischer Kegel ist. (5 Punkte)

2. Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ein Polyeder mit $\operatorname{rank}(A) = m < n$. Zeigen Sie: Ein Vektor $x' \in P$ ist genau dann eine Ecke von P, wenn er eine zulässige Basislösung ist. (5 Punkte)

3. Betrachten Sie das folgende lineare Ungleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Skizzieren Sie den Lösungsraum, bringen Sie das System durch Einführen von Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 auf die Form $Ax = b, x \geq 0$, und bestimmen Sie alle Basen und die zugehörigen Basislösungen. Gibt es degenerierte oder unzulässige Basis-Lösungen? Wenn ja, welche? (2 Punkte)

b.w.

4. Verwenden Sie den SIMPLEX-ALGORITHMUS, um die folgenden LPs zu lösen:

(a)

$$\begin{array}{rrcl} & \max\ 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrcl} & \max\ 5x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\ & 4x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rrcl} & \min\ 5x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - 3x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 - 4x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rrcl} & \min\ -x_1 - 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 - x_2 & \geq & -3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Notieren Sie alle zwischenzeitlich auftretenden Simplex-Tableaus, und beschreiben Sie, warum Sie eine bestimmte Variable auswählen können, welche die Basis betritt bzw. verlässt. Wenn es eine Optimallösung gibt, geben Sie auch den Wert einer solchen an. (2+2+2+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 12. Mai, 2022, vor der Vorlesung im Hörsaal.