Modellierung von Optimierungsproblemen als LPs

Defintion

Sei G ein gerichteter Graph mit Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$ und seien s und t Knoten von G. Ein zulässiger **s-t-Fluss** in (G, u) ist eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

- $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und
- $\Delta_f(v) := \sum_{e \in \delta_G^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta_G^-(v)} f(e) = 0$ für alle $v \in V(G) \setminus \{s, t\}$.

Der **Wert** eines s-t-Flusses f ist $\mathrm{val}(f) = \Delta_f(s)$.

Modellierung von Optimierungsproblemen als LPs

MAXIMUM-FLOW-PROBLEM

Eingabe: Ein gerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$,
Knoten $s, t \in V(G)$ mit $s \neq t$.

Aufgabe: Finde einen s-t-Fluss $f : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit maximalem Wert.

LP-Formulierung:

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & \sum_{e \in \delta_G^+(s)} x_e - \sum_{e \in \delta_G^-(s)} x_e & & & \\
\text{s.t.} & x_e & \geq & 0 & \text{für } e \in E(G) \\
 & x_e & \leq & u(e) & \text{für } e \in E(G) \\
 & \sum_{e \in \delta_G^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta_G^-(v)} x_e & = & 0 & \text{für } v \in V(G) \setminus \{s, t\}
\end{array}
$$

Ganzzahlige Lineare Programmierung

Ganzzahlige LINEARE PROGRAMMIERUNG

Eingabe: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, Vektoren $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

Aufgabe: Finde einen Vektor $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $Ax \leq b$, der $c^t x$ maximiert.

Ganzzahlige Lineare Programme bezeichnen wir als ILPs (Integer Lineare Programs).

Oft müssen nur einige Variablen ganzzahlig sein $\Rightarrow$ GEMISCHT-GANZZAHLIGE PROGRAMMIERUNG (englisch MIXED INTEGER LINEAR PROGRAMMING (MILP))

Wir werden sehen: Ganzzahligkeitsnebenbedingungen machen das Problem (meist) viel schwerer.

Beispiel: VERTEX COVER

> VERTEX-COVER-PROBLEM
>
> *Eingabe:* Ein ungerichteter Graph G, Gewichte $c : V(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
>
> *Gesucht:* Eine Menge $X \subseteq V(G)$ mit $\{v, w\} \cap X \neq \emptyset$ für alle $e = \{v, w\} \in E(G)$, sodass $\sum_{v \in X} c(v)$ minimiert wird.

Problem ist NP-schwer.
Formulierung als ILP:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{v \in V(G)} x_v c(v) & & \\
s.t. \quad & x_v + x_w \geq 1 & & \text{für } \{v, w\} \in E(G) \\
& x_v \in \{0, 1\} & & \text{für } v \in V(G)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Wenn $(x_v)_{v \in V(G)}$ Optimallösung von (1) ist, dann ist
$X = \{v \in V(G) \mid x_v = 1\}$ Optimallösung von VERTEX-COVER.
$\Rightarrow$ GANZZAHLIGE LINEARE PROGRAMMIERUNG ist selbst NP-schwer.

Beispiel: Vertex Cover

$$
\begin{array}{lll}
 & \min \sum_{v \in V(G)} x_v c(v) & \\
s.t. & x_v + x_w \geq 1 & \text{für } \{v, w\} \in E(G) \\
 & x_v \in \{0, 1\} & \text{für } v \in V(G)
\end{array}
$$

Idee: Ignoriere Ganzahligkeitbedingungen ($x_v \in \{0, 1\}$):

$$
\begin{array}{lll}
 & \min \sum_{v \in V(G)} x_v c(v) & \\
s.t. & x_v + x_w \geq 1 & \text{für } \{v, w\} \in E(G) \\
 & x_v \geq 0 & \text{für } v \in V(G) \\
 & x_v \leq 1 & \text{für } v \in V(G)
\end{array}
$$

Dieses LP heißt **LP-Relaxierung** des ILPs.
Es liefert 2-Approximation für Vertex Cover: Für jede Lösung x des relaxierten Problems, erhalte ganzzahlige Lösung $\tilde{x}$ durch

$$
\tilde{x}_v = \begin{cases} 1 & : \quad x_v \geq \frac{1}{2} \\ 0 & : \quad x_v < \frac{1}{2} \end{cases}
$$

$\Rightarrow$ Ergibt zulässige ILP-Lösung mit $\sum_{v \in V(G)} \tilde{x}_v c(v) \leq 2 \sum_{v \in V(G)} x_v c(v)$.

Ganzzahlige Lineare Programmierung

- Bei Minimierungsproblemen, nennt man den Quotienten aus optimalem Lösungswert von ILP und seiner LP-Relaxierung Ganzahligkeitslücke (Integrality Gap).
- Bei VERTEX COVER ist er also (höchstens) 2.
- Es gibt ILPs mit beliebig großer Ganzzahligkeitslücke.

Beispiel: STABLE SET

> STABLE-SET-PROBLEM
>
> *Eingabe:* Ein ungerichteter Graph G, Gewichte $c : V(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
>
> *Gesucht:* Eine Menge $X \subseteq V(G)$ mit $|\{v, w\} \cap X| \leq 1$ für alle $e = \{v, w\} \in E(G)$, sodass $\sum_{v \in X} c(v)$ maximiert wird.

ILP-Formulierung:

$$
\begin{array}{lll}
 & \max \sum\limits_{v \in V(G)} x_v c(v) & \\
s.t. & x_v + x_w \leq 1 & \text{für } \{v, w\} \in E(G) \\
 & x_v \in \{0, 1\} & \text{für } v \in V(G)
\end{array}
$$

LP-Relaxierung:

$$
\begin{array}{lll}
 & \max \sum\limits_{v \in V(G)} x_v c(v) & \\
s.t. & x_v + x_w \leq 1 & \text{für } \{v, w\} \in E(G) \\
 & x_v \geq 0 & \text{für } v \in V(G) \\
 & x_v \leq 1 & \text{für } v \in V(G)
\end{array}
$$

Beispiel: STABLE SET

ILP-Formulierung:

$$\begin{array}{lll} & \max \sum_{v \in V(G)} x_v c(v) & \\ s.t. & x_v + x_w \leq 1 & \text{für } \{v, w\} \in E(G) \\ & x_v \in \{0, 1\} & \text{für } v \in V(G) \end{array}$$

LP-Relaxierung:

$$\begin{array}{lll} & \max \sum_{v \in V(G)} x_v c(v) & \\ s.t. & x_v + x_w \leq 1 & \text{für } \{v, w\} \in E(G) \\ & x_v \geq 0 & \text{für } v \in V(G) \\ & x_v \leq 1 & \text{für } v \in V(G) \end{array}$$

Wenn G vollständiger Graph ist und $c(v) = 1$ für alle $v \in V(G)$ gilt, dann ergibt $x_v = \frac{1}{2}$ (für alle $v \in V(G)$) eine LP-Lösung mit Wert $\frac{n}{2}$. Optimaler ganzzahliger Lösungswert ist 1.

$\Rightarrow$ Ganzzahligkeitslücke ist (mindestens) $\frac{n}{2}$.

Dualität

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.d.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Ziel: Finde eine obere Schranke für den Wert einer Optimallösung.

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.d.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Allgemeiner Ansatz: Finde Zahlen $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass

$$12x_1 + 10x_2 = u_1 \cdot (4x_1 + 2x_2) + u_2 \cdot (8x_1 + 12x_2) + u_3 \cdot (2x_1 - 3x_2).$$

$\Rightarrow$ $5u_1 + 7u_2 + u_3$ ist eine obere Schranke für den Wert von jeder Lösung von (P).

$\Rightarrow$ Wähle u_1, u_2, u_3 so, dass $5u_1 + 7u_2 + u_3$ minimiert wird.