Lemma von Farkas

Theorem (Lemma von Farkas, allgemeinster Fall)

Für $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $D \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, $a \in \mathbb{R}^{m_1}$ und $b \in \mathbb{R}^{m_2}$ hat genau eines der beiden folgenden System eine Lösung:

System 1:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array}$$

System 2:

$$\begin{array}{rcrcl} u^t A & + & v^t C & \geq & 0^t \\ u^t B & + & v^t D & = & 0^t \\ u & & & \geq & 0 \\ u^t a & + & v^t b & < & 0 \end{array}$$

Lemma von Farkas

Theorem (Lemma von Farkas, allgemeinster Fall)

Für $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $D \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, $a \in \mathbb{R}^{m_1}$ und $b \in \mathbb{R}^{m_2}$ hat genau eines der beiden folgenden System eine Lösung:

System 1:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array}$$

System 2:

$$\begin{array}{rcrcl} u^t A & + & v^t C & \geq & 0^t \\ u^t B & + & v^t D & = & 0^t \\ u & & & \geq & 0 \\ u^t a & + & v^t b & < & 0 \end{array}$$

Lemma von Farkas

Theorem (Lemma von Farkas, allgemeinster Fall)

Für $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $D \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, $a \in \mathbb{R}^{m_1}$ und $b \in \mathbb{R}^{m_2}$ hat genau eines der beiden folgenden System eine Lösung:

System 1:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array}$$

System 2:

$$\begin{array}{rcrcl} u^t A & + & v^t C & \geq & 0^t \\ u^t B & + & v^t D & = & 0^t \\ u & & & \geq & 0 \\ u^t a & + & v^t b & < & 0 \end{array}$$

Lemma von Farkas

Corollary (Lemma von Farkas, Varianten)

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt:

(a) Es gibt genau dann einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \geq 0$ und $Ax = b$, wenn es keinen Vektor $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u^t A \geq 0^t$ und $u^t b < 0$ gibt.

(b) Es gibt genau dann einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$, wenn es keinen Vektor $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u^t A = 0^t$ und $u^t b < 0$ gibt.

Beweise: Beschränke das vorige Theorem auf ...

(a) die Matrix C und den Vektor b.

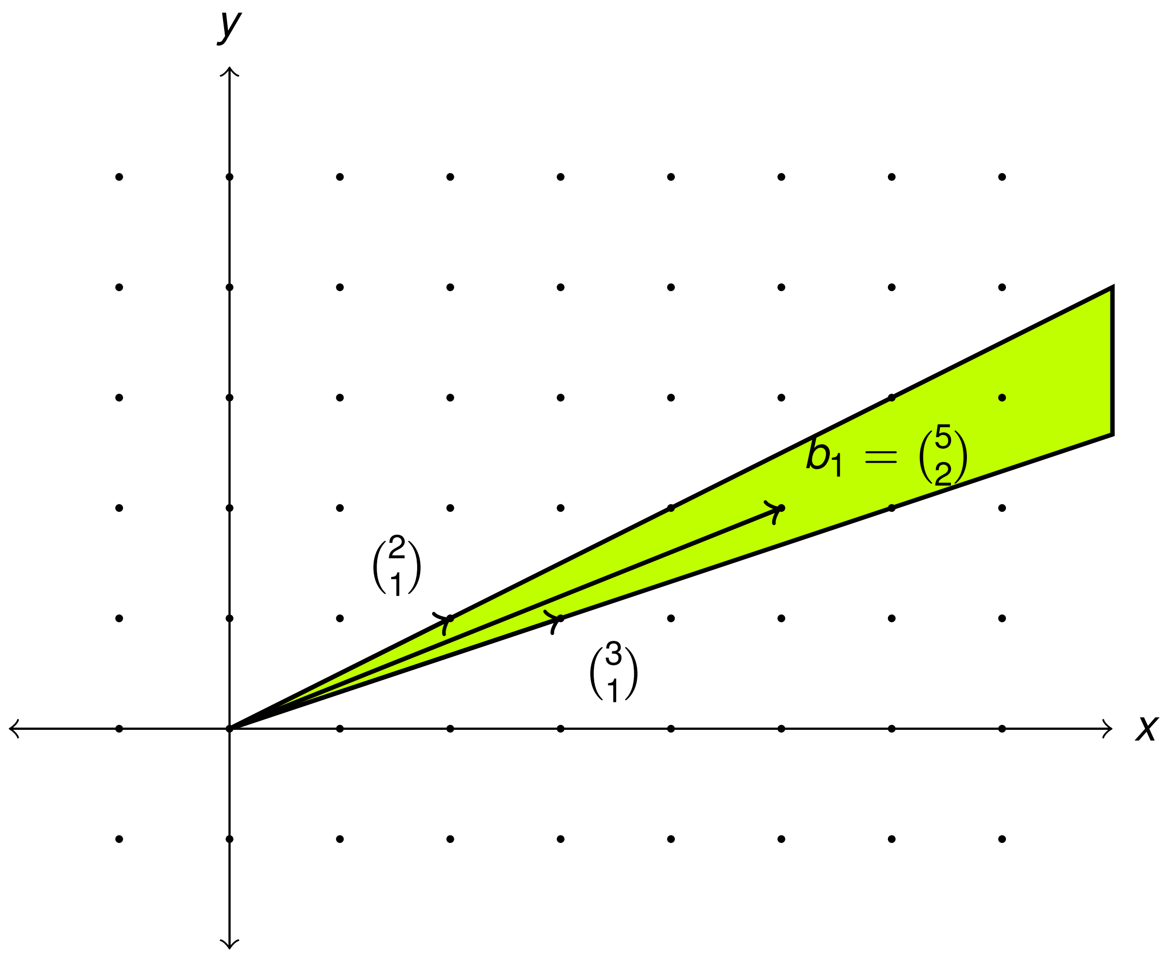
(b) die Matrix D und den Vektor b. $\square$

Version (a) hat eine geometrische Interpretation.

Lemma von Farkas: Illustration:

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \binom{5}{2}$ und $b_2 = \binom{1}{3}$.

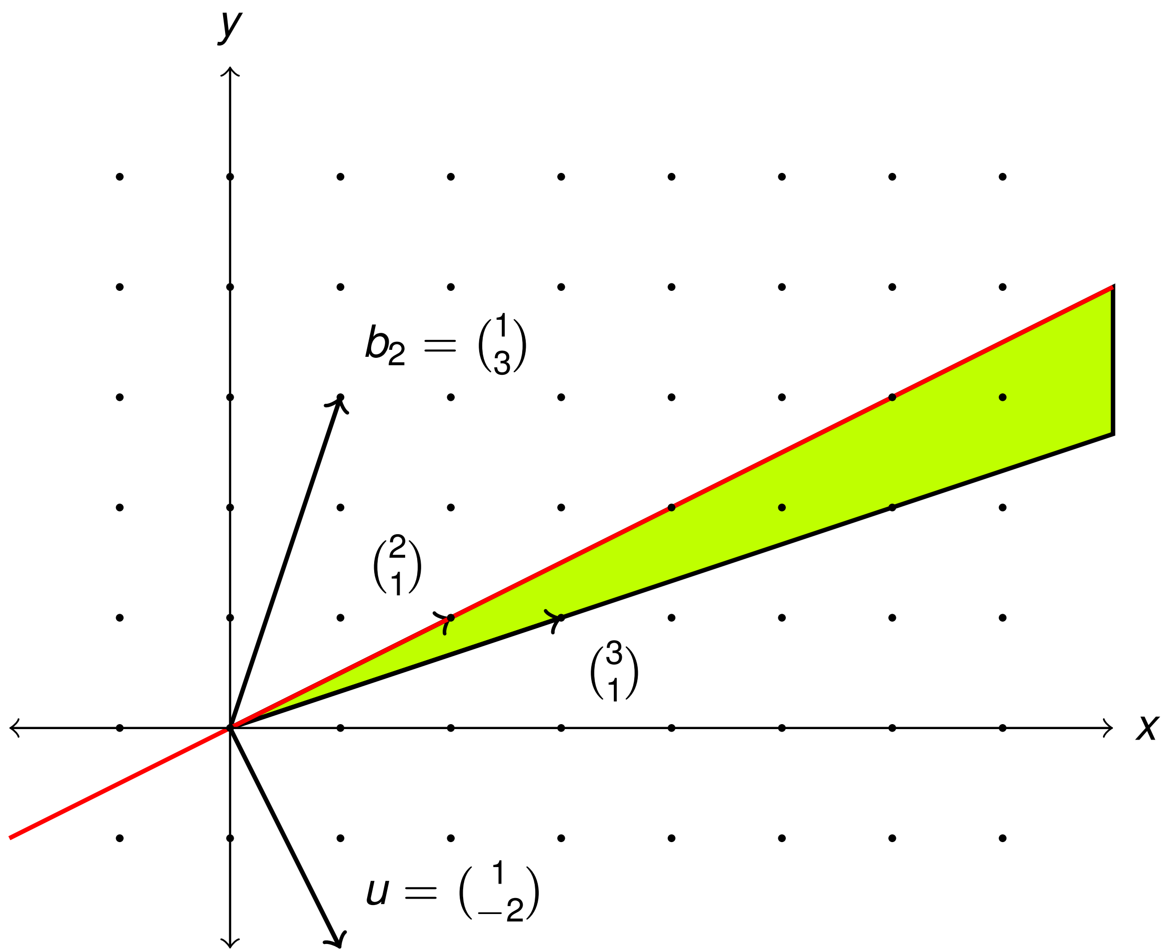
- $b_1 \in \text{cone}(\{\binom{2}{1}, \binom{3}{1}\})$



Lemma von Farkas: Illustration:

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \binom{5}{2}$ und $b_2 = \binom{1}{3}$.

- b_2 kann vom Kegel durch eine Hyperebene, die orthogonal zu $u = \binom{1}{-2}$ ist, getrennt werden.



Starke Dualität

Theorem (Starke Dualität)

Für zwei lineare Programme

$$\begin{array}{rrcl} & \max c^t x & & \qquad (P) \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rrcl} & \min b^t y & & \qquad (D) \\ \text{s.t.} & A^t y & = & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. (P) und (D) sind beide unzulässig.
2. (P) ist unbeschränkt und (D) ist unzulässig.
3. (P) ist unzulässig und (D) ist unbeschränkt.
4. (P) und (D) sind beide zulässig. Dann haben beide eine Optimallösung und für jede Optimallösung $\tilde{x}$ von (P) und jede Optimallösung $\tilde{y}$ von (D) gilt
$$c^t \tilde{x} = b^t \tilde{y}.$$

Korollar

Es seien A,B,C,D,E,F,G,H,K Matrizen und a,b,c,d,e,f Vektoren geeigneter Dimensionen, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times n\text{-Matrix,}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge m und $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge n. Dann gilt

$$\begin{array}{rl}
\max & \left\{ d^t x + e^t y + f^t z \;:\; \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & \leq & a \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & b \\ Gx & + & Hy & + & Kz & \geq & c \\ x & & & & & \geq & 0 \\ & & & & z & \leq & 0 \end{array} \right\} \\
= & \\
\min & \left\{ a^t u + b^t v + c^t w \;:\; \begin{array}{ccccccc} A^t u & + & D^t v & + & G^t w & \geq & d \\ B^t u & + & E^t v & + & H^t w & = & e \\ C^t u & + & F^t v & + & K^t w & \leq & f \\ u & & & & & \geq & 0 \\ & & & & w & \leq & 0 \end{array} \right\},
\end{array}$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht-leer sind.

Korollar

Es seien A,B,C,D,E,F,G,H,K Matrizen und a,b,c,d,e,f Vektoren geeigneter Dimensionen, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times n\text{-Matrix,}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge m und $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge n. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\max \left\{ d^t x + e^t y + f^t z \;:\; \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & \leq & a \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & b \\ Gx & + & Hy & + & Kz & \geq & c \\ x & & & & & \geq & 0 \\ & & & & z & \leq & 0 \end{array} \right\} \\
=\;& \\
&\min \left\{ a^t u + b^t v + c^t w \;:\; \begin{array}{ccccccc} A^t u & + & D^t v & + & G^t w & \geq & d \\ B^t u & + & E^t v & + & H^t w & = & e \\ C^t u & + & F^t v & + & K^t w & \leq & f \\ u & & & & & \geq & 0 \\ & & & & w & \leq & 0 \end{array} \right\},
\end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht-leer sind.

Korollar

Es seien A,B,C,D,E,F,G,H,K Matrizen und a,b,c,d,e,f Vektoren geeigneter Dimensionen, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times n\text{-Matrix,}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge m und $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge n. Dann gilt

$$\max \left\{ d^t x + e^t y + f^t z \;:\; \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & \leq & a \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & b \\ Gx & + & Hy & + & Kz & \geq & c \\ x & & & & & \geq & 0 \\ & & & & z & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

$$=$$

$$\min \left\{ a^t u + b^t v + c^t w \;:\; \begin{array}{ccccccc} A^t u & + & D^t v & + & G^t w & \geq & d \\ B^t u & + & E^t v & + & H^t w & = & e \\ C^t u & + & F^t v & + & K^t w & \leq & f \\ u & & & & & \geq & 0 \\ & & & & w & \leq & 0 \end{array} \right\},$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht-leer sind.

Korollar

Es seien $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ Matrizen und a, b, c, d, e, f Vektoren geeigneter Dimensionen, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times n\text{-Matrix,}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge m und $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge n. Dann gilt

$$\max \left\{ d^t x + e^t y + f^t z \;:\; \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & \leq & a \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & b \\ Gx & + & Hy & + & Kz & \geq & c \\ x & & & & & \geq & 0 \\ & & & & z & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

$$=$$

$$\min \left\{ a^t u + b^t v + c^t w \;:\; \begin{array}{ccccccc} A^t u & + & D^t v & + & G^t w & \geq & d \\ B^t u & + & E^t v & + & H^t w & = & e \\ C^t u & + & F^t v & + & K^t w & \leq & f \\ u & & & & & \geq & 0 \\ & & & & w & \leq & 0 \end{array} \right\},$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht-leer sind.

Korollar

Es seien A,B,C,D,E,F,G,H,K Matrizen und a,b,c,d,e,f Vektoren geeigneter Dimensionen, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times n\text{-Matrix,}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge m und $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Länge n. Dann gilt

$$\max \left\{ d^t x + e^t y + f^t z \;:\; \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & \leq & a \\ Dx & + & Ey & + & Fz & = & b \\ Gx & + & Hy & + & Kz & \geq & c \\ x & & & & & \geq & 0 \\ & & & & z & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

$$=$$

$$\min \left\{ a^t u + b^t v + c^t w \;:\; \begin{array}{ccccccc} A^t u & + & D^t v & + & G^t w & \geq & d \\ B^t u & + & E^t v & + & H^t w & = & e \\ C^t u & + & F^t v & + & K^t w & \leq & f \\ u & & & & & \geq & 0 \\ & & & & w & \leq & 0 \end{array} \right\},$$

vorausgesetzt, dass beide Mengen nicht-leer sind.

Dualisieren

	Primales LP	Duales LP
Variablen	$x_1, \ldots, x_n$	$y_1, \ldots, y_m$
Matrix	A	A^t
Rechte Seite	b	c
Zielfunktion	$\max c^t x$	$\min b^t y$
Nebenbedingungen	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \geq 0$
	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \leq 0$
	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j$
	$x_j \leq 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$