Komplementärer Schlupf (Complementary slackness)

Theorem (Komplementärer Schlupf für Ungleichungen)

Seien $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ ein primal-duales Paar von linearen Programmen. Dann sind für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ und $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^t y = c$ und $y \geq 0$ die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) x ist eine Optimallösung von $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und y ist eine Optimallösung von $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$.

(b) $c^t x = b^t y$.

(c) $y^t(b - Ax) = 0$.

Komplementärer Schlupf (Complementary slackness)

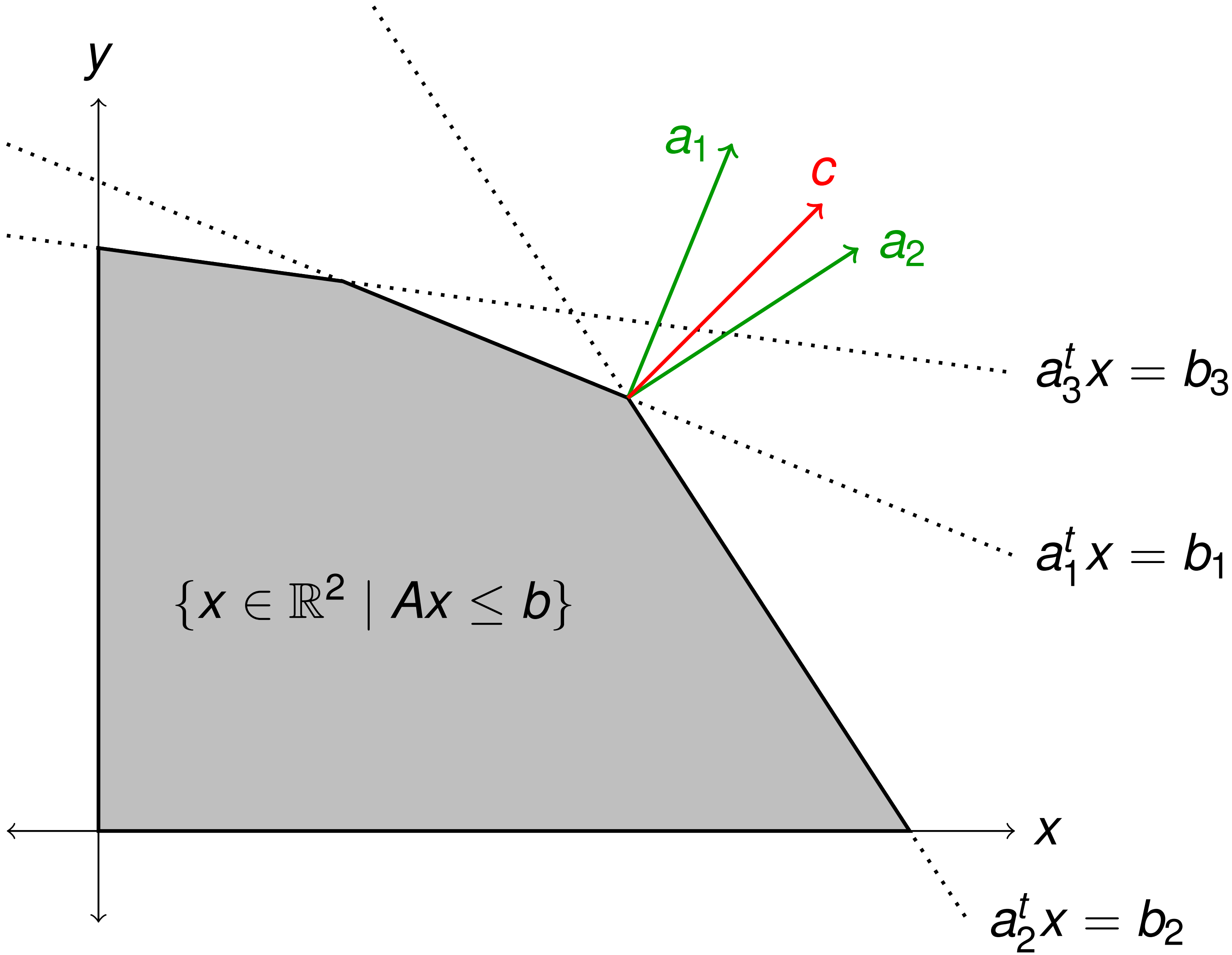
Theorem (Komplementärer Schlupf für Ungleichungen mit nicht-negativen Variablen)

Sei $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$ ein primal-duales Paar von linearen Programmen. Dann sind für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ und $x \geq 0$ und $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^t y \geq c$ und $y \geq 0$ die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(a) x ist eine Optimallösung von $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ und y eine Optimallösung von $\min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$.

(b) $c^t x = b^t y$.

(c) $y^t(b - Ax) = 0$ und $x^t(A^t y - c) = 0$.


y
a_1
c
a_2
$a_3^t x = b_3$
$a_1^t x = b_1$
$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax \leq b\}$
x
$a_2^t x = b_2$

Theorem (Starker Komplementärer Schlupf, Strict Complementary Slackness)

Seien $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ ein primal-duales Paar von zulässigen LPs. Dann gilt für jede Ungleichung $a_i^t x \leq b_i$ in $Ax \leq b$ genau eine der folgenden Aussagen:

(a) Das primale LP $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ hat eine Optimallösung x^* mit $a_i^t x^* < b_i$.

(b) Das duale LP $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ hat eine Optimallösung $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)^t$ mit $y_i^* > 0$.

Theorem

Seien $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ und $\min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\}$ ein primal-duales Paar von LPs, die beide zulässig sind. Dann gibt es Optimallösungen x^* und y^* der LPs, sodass für jede Ungleichung $a_i^t x \leq b_i$ in $Ax \leq b$ entweder $a_i^t x^* < b_i$ oder $y_i^* > 0$ gilt.

Anwendung: Das Max-Flow-Problem

MAXIMUM-FLOW-PROBLEM

Eingabe: Ein gerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$,
Knoten $s, t \in V(G)$ mit $s \neq t$.

Aufgabe: Finde einen s-t-Fluss $f : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit maximalem Wert.

LP-Formulierung:

$$
\begin{array}{llrcll}
\max & \displaystyle\sum_{e \in \delta^+_G(s)} x_e - \sum_{e \in \delta^-_G(s)} x_e & & & & \\
\text{s.t.} & & x_e & \geq & 0 & \text{für } e \in E(G) \\
 & & x_e & \leq & u(e) & \text{für } e \in E(G) \\
 & & \displaystyle\sum_{e \in \delta^+_G(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-_G(v)} x_e & = & 0 & \text{für } v \in V(G) \setminus \{s, t\}
\end{array}
$$

Das Max-Flow-Problem

Annahme: Keine Kanten eingehenden Kanten nach s oder ausgehende Kanten aus t.

LP-Formulierung:

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & \displaystyle\sum_{e \in \delta^+_G(s)} x_e & & & \\
\text{s.d.} & x_e & \geq & 0 & \text{for } e \in E(G) \\
 & x_e & \leq & u(e) & \text{for } e \in E(G) \\
 & \displaystyle\sum_{e \in \delta^+_G(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-_G(v)} x_e & = & 0 & \text{for } v \in V(G) \setminus \{s, t\}
\end{array}
$$

Das Max-Flow-Problem

Annahme: Keine Kanten eingehenden Kanten nach s oder ausgehende Kanten aus t.

LP-Formulierung:

$$
\begin{array}{llll}
\max & \displaystyle\sum_{e\in\delta^+_G(s)} x_e & & \\
\text{s.d.} & x_e \geq 0 & & \text{for } e \in E(G) \\
& x_e \leq u(e) & & \text{for } e \in E(G) \\
& \displaystyle\sum_{e\in\delta^+_G(v)} x_e - \sum_{e\in\delta^-_G(v)} x_e = 0 & & \text{for } v \in V(G) \setminus \{s,t\}
\end{array}
$$

Duales LP:

$$
\begin{array}{llll}
\min & \displaystyle\sum_{e\in E(G)} u(e)y_e & & \\
\text{s.d.} & y_e \geq 0 & & \text{for } e \in E(G) \\
& y_e + z_v - z_w \geq 0 & & \text{for } e = (v,w) \in E(G), \{s,t\} \cap \{v,w\} = \emptyset \\
& y_e + z_v \geq 0 & & \text{for } e = (v,t) \in E(G), v \neq s \\
& y_e - z_w \geq 1 & & \text{for } e = (s,w) \in E(G), w \neq t \\
& y_e \geq 1 & & \text{for } e = (s,t) \in E(G)
\end{array}
$$

Das Max-Flow-Problem

Annahme: Keine Kanten eingehenden Kanten nach s oder ausgehende Kanten aus t.

LP-Formulierung:

$$
\begin{array}{llcll}
\max & \displaystyle\sum_{e \in \delta_G^+(s)} x_e & & & \\
\text{s.d.} & x_e & \geq & 0 & \text{for } e \in E(G) \\
 & x_e & \leq & u(e) & \text{for } e \in E(G) \\
 & \displaystyle\sum_{e \in \delta_G^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta_G^-(v)} x_e & = & 0 & \text{for } v \in V(G) \setminus \{s, t\}
\end{array}
$$

Duales LP (vereinfacht):

$$
\begin{array}{llcll}
\min & \displaystyle\sum_{e \in E(G)} u(e) y_e & & & \\
\text{s.t.} & y_e & \geq & 0 & \text{for } e \in E(G) \\
 & y_e + z_v - z_w & \geq & 0 & \text{for } e = (v, w) \in E(G) \\
 & z_s & = & -1 & \\
 & z_t & = & 0 &
\end{array}
$$

Das Max-Flow Problem

Annahme: Keine Kanten eingehenden Kanten nach s oder ausgehende Kanten aus t.

LP-Formulierung:

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & \sum_{e \in \delta_G^+(s)} x_e & & & \\
\text{s.d.} & x_e & \geq & 0 & \text{for } e \in E(G) \\
 & x_e & \leq & u(e) & \text{for } e \in E(G) \\
 & \sum_{e \in \delta_G^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta_G^-(v)} x_e & = & 0 & \text{for } v \in V(G) \setminus \{s, t\}
\end{array}
$$

Duales LP:

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & \sum_{e \in E(G)} u(e) y_e & & & \\
\text{s.t.} & y_e & \geq & 0 & \text{for } e \in E(G) \\
 & y_e + z_v - z_w & \geq & 0 & \text{for } e = (v, w) \in E(G) \\
 & z_s & = & -1 & \\
 & z_t & = & 0 &
\end{array}
$$

Das Max-Flow Problem

(Max-Flow-Min-Cut-Theorem)

Sei G ein gerichteter Graph mit Kantenkapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$. Es seien $s, t \in V(G)$ zwei verschiedene Knoten. Dann ist die minimale Kapazität aller s-t-Schnitte gleich dem maximalen Wert eines s-t-Flusses.