Satz

Die Gauss-Elimination hat polynomielle Laufzeit. $\square$

$\Rightarrow$ Folgende Problem können in polynomieller Laufzeit gelöst werden:

- Das Lösen eine Gleichungssystems.
- Die Berechnung der Determinante einer Matrix.
- Die Berechnung des Rangs einer Matrix.
- Die Invertierung einer regulären Matrix.
- Die Überprüfung, ob eine Menge von rationalen Vektoren linear unabhängig ist.

Die Ellipsoid-Methode

Ellipsoid-Methode

- Erster Algorithmus zur LP-Lösung mit beweisbar polynomieller Laufzeit.
- Entwickelt von Khachiyan [1979].
- Entscheidet in der Grundversion nur, ob ein Polyeder leer ist oder nicht.
- Kann auch benutzt werden, ohne dass alle Nebenbedingungen explizit aufgelistet werden.
- Auch geeignet für andere (nicht-lineare) Optimierungsprobleme.

Definition:

Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist ein **Ellipsoid**, wenn es einen Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ und eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, sodass

$$E = \{Mx + s \mid x \in B^n\},$$

wobei $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel ist.

Kurznotation: $E = s + MB^n$.

Definition

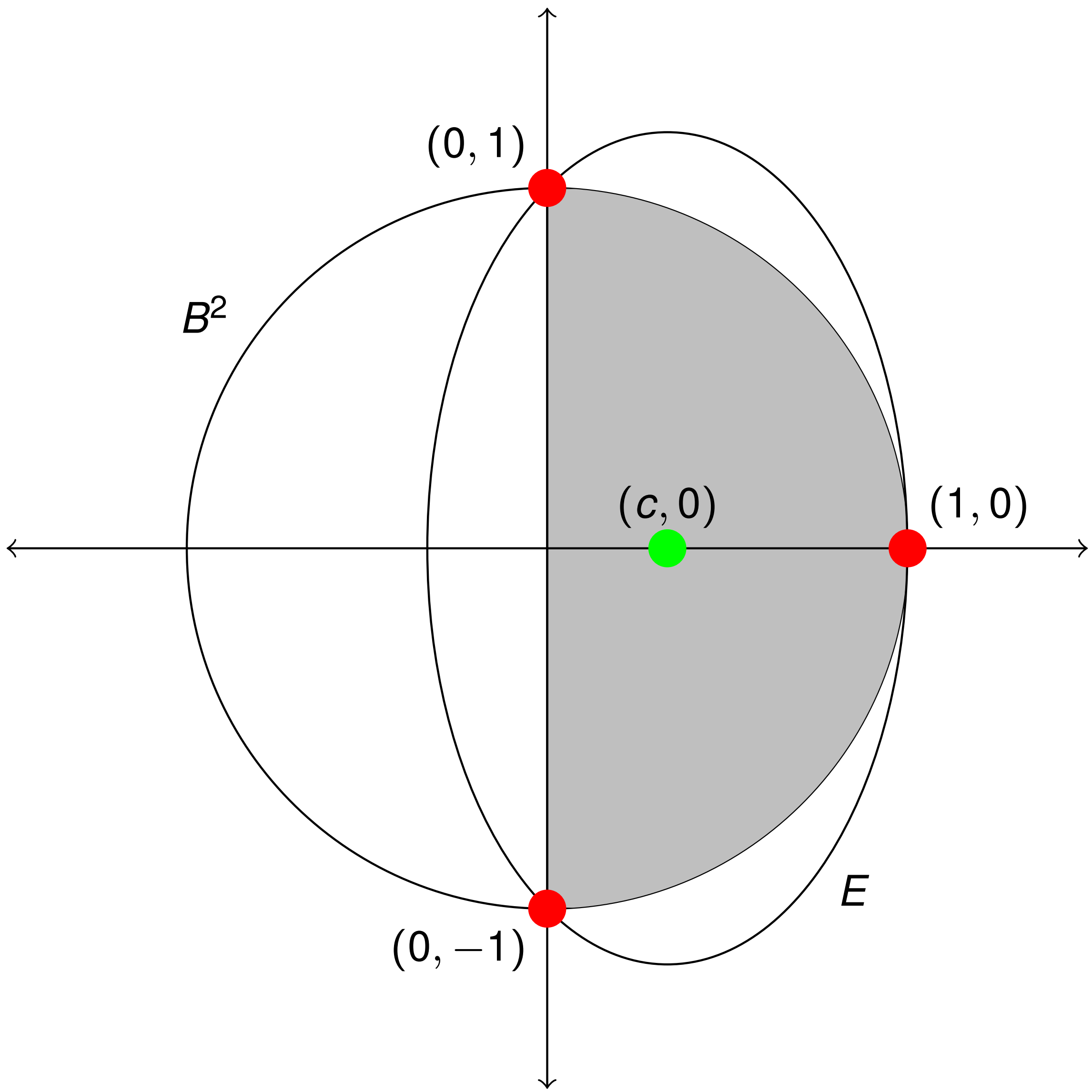
Eine symmetrische Matrix A heißt **positiv definit**, wenn $x^t A x > 0$ für jeden Nicht-Null-Vektor x gilt. Sie heißt **positiv semidefinit**, wenn $x^t A x \geq 0$ für jeden Vektor x gilt.

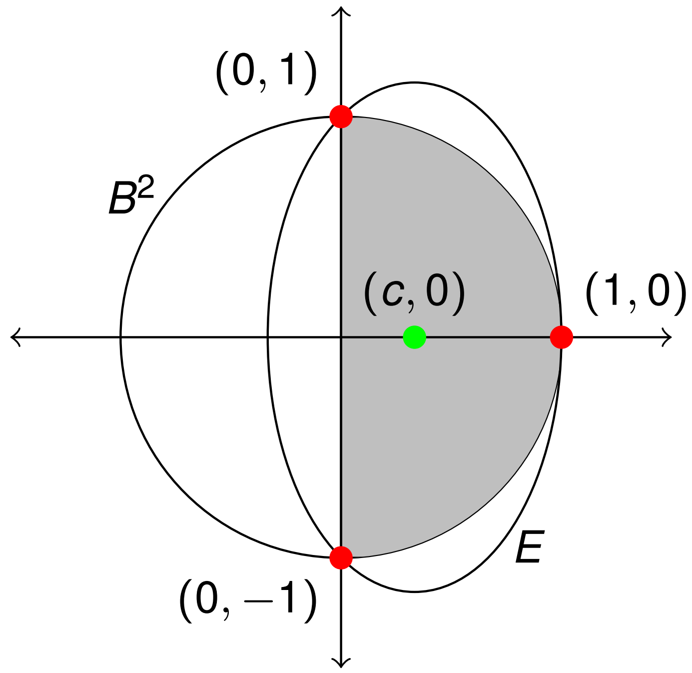
Bemerkung: Eine $n \times n$-Matrix Q ist genau dann positiv definit, wenn es eine nicht-singuläre Matrix M mit $Q = MM^t$ gibt (hier ohne Beweis, siehe auch Skript).

Lemma

Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Ellipsoid, wenn es eine symmetrische positiv definite $n \times n$-Matrix Q und einen Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ mit $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - s)^t Q^{-1} (x - s) \leq 1\}$ gibt.

Erstes Ziel: Finde ein Ellipsoid mit kleinstem Volumen, das eine Halbkugel der Einheitskugel B^n enthält.

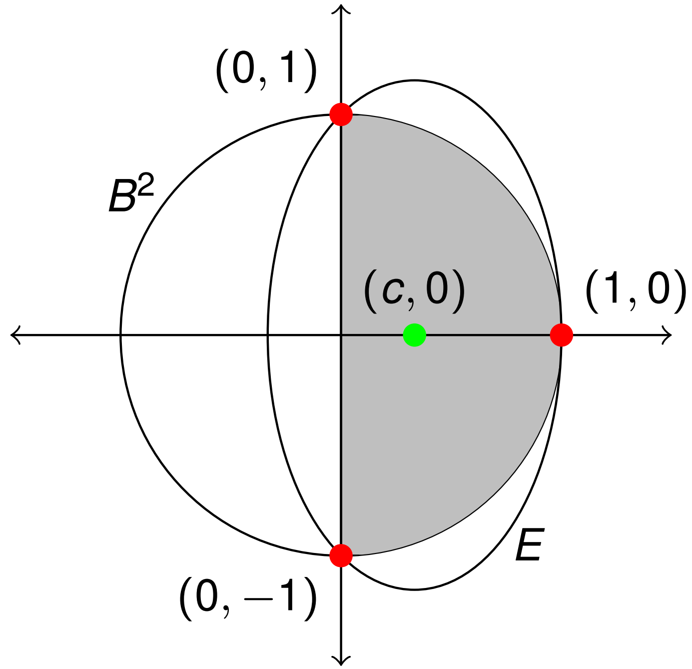




Ansatz: Wähle als Mittelpunkt des Ellipsoid eine Position $c \cdot e_1$.
Kandidaten für das Ellipsoid sind:

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^2 (x_1 - c)^2 + \beta^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

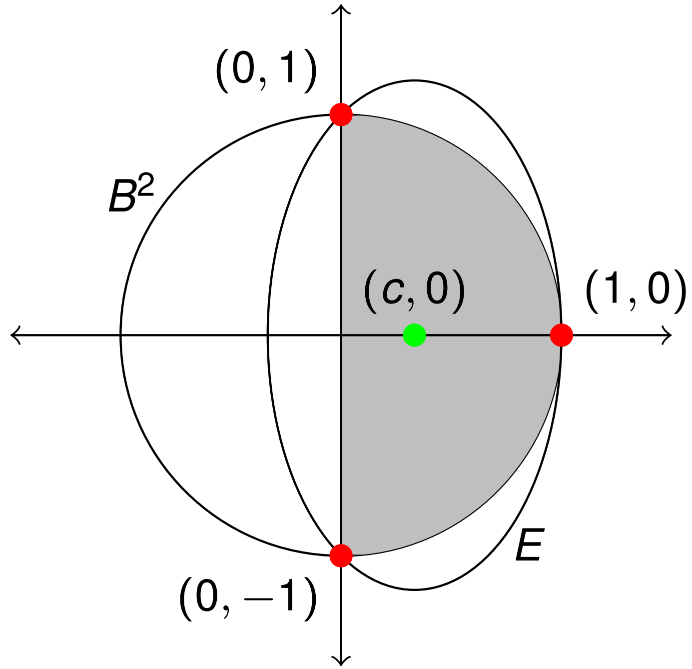
α, β und c sind zu bestimmen.



$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^2 (x_1 - c)^2 + \beta^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

Wunsch 1: e_1 soll auf dem Rand von E liegen.
$\Rightarrow$: Fordere $\alpha^2(1-c) = 1$ bzw.:

$$\alpha^2 = \frac{1}{(1-c)^2}$$



$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^2 (x_1 - c)^2 + \beta^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

Wunsch 2: Die Punkte auf $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$, die auf dem Rand von B^n liegen, sollen auf dem Rand von E liegen.

$\Rightarrow$: Fordere $\alpha^2 c^2 + \beta^2 = 1$ und somit:

$$\beta^2 = 1 - \alpha^2 c^2 = 1 - \frac{c^2}{(1-c)^2} = \frac{1-2c}{(1-c)^2}.$$

Lemma (Halbkugel-Lemma)

$$B^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\} \quad \subseteq \quad E$$

mit

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{(n+1)^2}{n^2} \left(x_1 - \frac{1}{n+1} \right)^2 + \frac{n^2-1}{n^2} \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Außerdem: $\frac{\mathrm{vol}(E)}{\mathrm{vol}(B^n)} \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}}$.

Lemma (Halb-Ellipsoid-Lemma)

Sei $E = p + \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t Q^{-1} x \leq 1\}$ ein Ellipsoid und $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a^t Qa = 1$. Dann gilt

$$E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq a^t p\} \subseteq E'$$

mit

$$E' = p + \frac{1}{n+1} Qa + \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{n^2-1}{n^2} x^t \left(Q^{-1} + \frac{2}{n-1} aa^t \right) x \leq 1 \right\}.$$

Und: $\frac{\mathrm{vol}(E')}{\mathrm{vol}(E)} \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}}$.

Beweis:
Sei M eine reguläre $n \times n$-Matrix mit $Q = MM^t$. O.B.d.A: $a^t M = e_1^t$ und somit $Qa = MM^t a = M(a^t M)^t = Me_1$ (sonst multipliziere M mit einer Rotationsmatrix, die $a^t M$ auf e_1 abbildet). Dann:

$$
\begin{aligned}
& E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq a^t p\} \\
= \quad & (p + MB^n) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq a^t p\} \\
= \quad & p + (MB^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t (x+p) \geq a^t p\}) \\
= \quad & p + (MB^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq 0\}) \\
= \quad & p + M(B^n \cap M^{-1}\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq 0\}) \\
= \quad & p + M(B^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t Mx \geq 0\}) \\
= \quad & p + M(B^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid e_1^t x \geq 0\}) \\
\subseteq \quad & p + \frac{1}{n+1} Me_1 + M\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{n^2-1}{n^2} x^t \left(I_n + \frac{2}{n-1} e_1 e_1^t\right) x \leq 1\right\} \\
= \quad & p + \frac{1}{n+1} Me_1 + \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{n^2-1}{n^2} (M^{-1}x)^t \left(I_n + \frac{2}{n-1} e_1 e_1^t\right) M^{-1} x \leq 1\right\} \\
= \quad & p + \frac{1}{n+1} Qa + \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{n^2-1}{n^2} x^t \left(Q^{-1} + \frac{2}{n-1} aa^t\right) x \leq 1\right\}
\end{aligned}
$$