Lemma (Halbkugel-Lemma)

$$B^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\} \quad \subseteq \quad E$$

mit

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{(n+1)^2}{n^2} \left(x_1 - \frac{1}{n+1} \right)^2 + \frac{n^2-1}{n^2} \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Außerdem: $\frac{\mathrm{vol}(E)}{\mathrm{vol}(B^n)} \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}}$.

Lemma (Halb-Ellipsoid-Lemma)

Sei $E = p + \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t Q^{-1} x \leq 1\}$ ein Ellipsoid und $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a^t Q a = 1$. Dann gilt

$$E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \geq a^t p\} \subseteq E'$$

mit

$$E' = p + \frac{1}{n+1} Qa + \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{n^2-1}{n^2} x^t \left(Q^{-1} + \frac{2}{n-1} aa^t\right) x \leq 1\right\}.$$

Und: $\frac{\mathrm{vol}(E')}{\mathrm{vol}(E)} \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}}$.

Beweis (Fortsetzung):

Wir können E' in Standardform schreiben als

$$E' = p + \frac{1}{n+1} Qa + \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^t \tilde{Q}^{-1} x \leq 1 \right\}$$

mit

$$\tilde{Q} = \frac{n^2}{n^2-1} \left(Q - \frac{2}{n+1} Qaa^t Q^t \right).$$

Denn:

$$\begin{aligned}
& \frac{n^2-1}{n^2} \left(Q^{-1} + \frac{2}{n-1} aa^t \right) \frac{n^2}{n^2-1} \left(Q - \frac{2}{n+1} Qaa^t Q^t \right) \\
= \quad & I_n - \frac{2}{n+1} aa^t Q^t + \frac{2}{n-1} aa^t Q - \frac{4}{n^2-1} a \underbrace{a^t Qa}_{=1} a^t Q^t \\
= \quad & I_n.
\end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung):

$$\Rightarrow \frac{\text{vol}(E')}{\text{vol}(E)} = \sqrt{\frac{\det(\tilde{Q})}{\det(Q)}}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\det(\tilde{Q})}{\det(Q)} &= \det\left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(I_n - \frac{2}{n+1}aa^tQ^t\right)\right)\\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \det\left(I_n - \frac{2}{n+1}aa^tQ^t\right)\\
&\overset{(*)}{=} \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \left(1 - \frac{2}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\det(\tilde{Q})}{\det(Q)}} \leq \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n}{2}} (1 - \tfrac{2}{n+1})^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}} \qquad \square$$

Algorithm 1: Idealized Ellipsoid Algorithm

Input: A separation oracle for a closed convex set $K \subseteq \mathbb{R}^n$, a number $R > 0$ with $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$, and a number $\epsilon > 0$.

Output: An $x \in K$ or the message "$\mathrm{vol}(K) < \epsilon$".

$p_0 := 0$, $A_0 := R^2 I_n$;

for $k = 0, \ldots, N(R, \epsilon) := \lfloor 2(n+1)(n \ln(2R) + \ln(\frac{1}{\epsilon})) \rfloor$ **do**

  if $p_k \in K$ **then**

    return p_k;

  Let $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ be a vector with $\bar{a}^t y > \bar{a}^t p_k$ for all $y \in K$;

  $b_k := \frac{A_k \bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^t A_k \bar{a}}}$;

  $p_{k+1} := p_k + \frac{1}{n+1} b_k$;

  $A_{k+1} := \frac{n^2}{n^2-1}(A_k - \frac{2}{n+1} b_k b_k^t)$;

return "$\mathrm{vol}(K) < \epsilon$";

Theorem

Zu einem durch ein Separationsorakel gegebenem $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$, und R mit $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$ kann man mit $O(n(n \ln(R) + \ln(\frac{1}{\epsilon})))$ Iterationen des IDEALISIERTEN ELLIPSOID-VERFAHRENS ein $x \in K$ berechnen oder (korrekterweise) "$\text{vol}(K) < \epsilon$" ausgeben. Jede Iteration benötigt einen Orakelaufruf, $O(n^2)$ arithmetische Standardoperationen und die Berechnung einer Quadratwurzel von einer reellen Zahl.

Fehler-Analyse

Problem:

Wir können in $b_k := \frac{A_k \bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^t A_k \bar{a}}}$ die Wurzel nicht exakt ausrechnen.

$\Rightarrow$ Wir müssen mit gerundeten Zwischenlösungen rechnen.

$\widetilde{p_k}$ und $\widetilde{A_k}$: exakte Werte
p_k und A_k: gerundete Werte

Aber: $\widetilde{p_k}$ und $\widetilde{A_k}$ werden aus den gerundeten Werten p_{k-1} und A_{k-1} berechnet.

$\widetilde{E_k}$ und E_k seien die zugehörigen Ellipsoide

Sei δ eine obere Schranke für den absoluten Rundungsfehler, also $\|p_k - \widetilde{p_k}\|_\infty \leq \delta$ und $\|A_k - \widetilde{A_k}\|_\infty \leq \delta$.

Beim Runden der Einträge in $\widetilde{A_k}$ sorgen wir dafür, dass die Matrix symmetrisch bleibt.

Let $\Gamma_k = A_k - \widetilde{A_k}$ and $\Delta_k = p_k - \widetilde{p_k}$.

Es sei $\|\cdot\|$ für Vektoren die Euklidische Norm und für Matrizen die induzierte Operator-Norm.

Können annehmen:

Für jedes $x \in K$ gilt $(x - \widetilde{p}_k)^t \widetilde{A_k}^{-1} (x - \widetilde{p}_k) \leq 1$

Für p_k und A_k muss das aber nicht gelten.

$\Rightarrow$ Vergrößere das Ellipsoid in jeder Iteration leicht durch Skalierung von $\widetilde{A_k}$ um den Faktor $\mu = 1 + \frac{1}{2n(n+1)}$.

$\Rightarrow$ Ersetze $\widetilde{A_k}$ durch $\mu\widetilde{A_k}$ (und nenne das Ergebnis wieder $\widetilde{A_k}$!).

Dann gilt für $x \in K$:

$$(x - \widetilde{p}_k)^t \widetilde{A_k}^{-1} (x - \widetilde{p}_k) \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{2n(n+1)}} = \frac{2n^2 + 2n}{2n^2 + 2n + 1} < 1 - \frac{1}{4n^2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}(x-p_k)^t A_k^{-1}(x-p_k) &= (x-p_k)^t \widetilde{A_k}^{-1}(x-p_k) + \\ &\quad (x-p_k)^t (A_k^{-1} - \widetilde{A_k}^{-1})(x-p_k).\end{aligned}$$

Beschränkung der Summanden:

$$\begin{aligned}&(x-p_k)^t \widetilde{A_k}^{-1}(x-p_k)\\ =\ & (x-\widetilde{p_k})^t \widetilde{A_k}^{-1}(x-\widetilde{p_k}) + |2\Delta_k^t \widetilde{A_k}^{-1}(x-\widetilde{p_k})| + \Delta_k^t \widetilde{A_k}^{-1}\Delta_k\\ \le\ & 1-\tfrac{1}{4n^2} + 2\|\Delta_k\|\cdot\|\widetilde{A_k}^{-1}\|\ (R+\|\widetilde{p_k}\|) + \|\Delta_k\|^2\cdot\|\widetilde{A_k}^{-1}\|\\ \le\ & 1-\tfrac{1}{4n^2} + 2\sqrt{n}\delta\ \|\widetilde{A_k}^{-1}\|\ (R+\|\widetilde{p_k}\|) + n\delta^2\|\widetilde{A_k}^{-1}\|.\end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned}&(x-p_k)^t (A_k^{-1} - \widetilde{A_k}^{-1})(x-p_k)\\ \le\ & \|x-p_k\|^2\cdot\|A_k^{-1} - \widetilde{A_k}^{-1}\|\\ \le\ & (R+\|p_k\|)^2\ \|A_k^{-1}(A_k-\widetilde{A_k})\widetilde{A_k}^{-1}\|\\ \le\ & (R+\|p_k\|)^2\ \|A_k^{-1}\|\cdot\|\widetilde{A_k}^{-1}\|\cdot\|\Gamma_k\|\\ \le\ & (R+\|p_k\|)^2\ \|A_k^{-1}\|\cdot\|\widetilde{A_k}^{-1}\|\cdot n\delta\end{aligned}$$

Wunsch an δ

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4n^2} \;\geq\;& 2\sqrt{n}\delta \;\|\widetilde{A_k}^{-1}\|\;(R + \|\widetilde{p_k}\|) + n\delta^2\|\widetilde{A_k}^{-1}\| \\
&+(R + \|p_k\|)^2\;\|A_k^{-1}\| \cdot \|\widetilde{A_k}^{-1}\|n\delta
\end{aligned}
$$

Auswirkungen der Skalierung auf das Volumen

$\widetilde{E_{k+1}}$ gehöre zur skalierten Version von $\widetilde{A_k}$:

$$\frac{\mathrm{vol}(\widetilde{E_{k+1}})}{\mathrm{vol}(E_k)} \le e^{-\frac{1}{2(n+1)}} \left(1 + \frac{1}{2n(n+1)}\right)^{\frac{n}{2}} \le e^{-\frac{1}{2(n+1)}} e^{\frac{1}{4(n+1)}} = e^{-\frac{1}{4(n+1)}}.$$

Dann

$$\frac{\mathrm{vol}(E_{k+1})}{\mathrm{vol}(E_k)} = \frac{\mathrm{vol}(\widetilde{E_{k+1}})}{\mathrm{vol}(E_k)} \frac{\mathrm{vol}(E_{k+1})}{\mathrm{vol}(\widetilde{E_{k+1}})} \le e^{-\frac{1}{4(n+1)}} \sqrt{\det(A_{k+1}\widetilde{A_{k+1}}^{-1})}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A_{k+1}\widetilde{A_{k+1}}^{-1}) &= \det\left(I_n + (A_{k+1} - \widetilde{A_{k+1}})\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\right) \\
&\overset{(*)}{\le} \|I_n + (A_{k+1} - \widetilde{A_{k+1}})\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|^n \\
&\le (1 + \|\Gamma_{k+1}\| \cdot \|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|)^n \\
&\le (1 + n\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|)^n \\
&\le e^{n^2\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|},
\end{aligned}$$

wobei Ungleichung $(*)$ daraus folgt, dass für eine $n \times n$-Matrix A mit Spalten $a_1, \ldots, a_n$ gilt: $|\det(A)| \le \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|$ (siehe Übungen).

Daraus folgt:

$$\frac{\mathrm{vol}(E_{k+1})}{\mathrm{vol}(E_k)} \leq e^{-\frac{1}{4(n+1)}} \cdot e^{\frac{1}{2}n^2\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\|}.$$

$\Rightarrow$ Wenn $\frac{1}{2}\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\| < \frac{1}{8(n+1)^3}$ gilt, dann folgt $\frac{\mathrm{vol}(E_{k+1})}{\mathrm{vol}(E_k)} < e^{-\frac{1}{8(n+1)}}$.

$\Rightarrow$ Neuer Wunsch:

$\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\| \leq \frac{1}{4(n+1)^3}$