# Innere-Punkt-Methoden

Primales und duales LP:

(P):
$$
\begin{array}{rrcl}
 & \max c^t x & & \\
\text{s.t.} & Ax + s & = & b \\
 & s & \geq & 0
\end{array} \tag{1}
$$

(D):
$$
\begin{array}{rrcl}
 & \min b^t y & & \\
\text{s.t.} & A^t y & = & c \\
 & y & \geq & 0
\end{array} \tag{2}
$$

Wir berechnen eine Lösung des dualen LPs.

## Neue Bedingungen:

$$\begin{aligned} Ax + s &= b \\ A^t y &= c \\ \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{y_i s_i}{\mu} - 1 \right)^2 &\leq \frac{1}{4} \qquad (*) \\ y &> 0 \\ s &> 0 \end{aligned}$$

## Allgemeine Strategie:

(I) Berechne eine Startlösung von (einer modifizierten Version von) (**??**): ✓

(II) Verringere $\mu$ um einen konstanten Faktor und passe $x$, $y$ und $s$ an den neuen Wert von $\mu$ an, sodass wieder eine Lösung von of (**??**) entsteht.
Iteriere den Schritt, bis $\mu$ klein genug ist. ✓

(III) Berechne eine Optimallösung des dualen LPs.

# Innere-Punkt-Methoden

$$\begin{array}{rcl} Ax + s & = & b \\ A^t y & = & c \\ \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{y_i s_i}{\mu} - 1 \right)^2 & \leq & \frac{1}{4} \\ y & > & 0 \\ s & > & 0 \end{array} \qquad (*)$$

- Sei $\eta = 2^{-4(m+2)(\Theta(\text{size}(\tilde{A})+\text{size}(\tilde{b})+\text{size}(\tilde{c})))}$.
- Sei $x^*$, $s^*$ primale Optimallösung und $y^*$ duale Optimallösung mit
  - $y_i \geq \eta$ für jedes $i \in \{1, \ldots, m+2\}$ mit $y_i > 0$ und
  - $s_i \geq \eta$ für jedes $i \in \{1, \ldots, m+2\}$ mit $s_i > 0$.

**Lemma**

Sei $\mu, x, y, s$ eine Lösung von (**??**). Sei $i \in \{1, \ldots, m+2\}$. Dann gilt:

(a) Wenn $y_i < \frac{\eta}{4(m+2)}$, dann $y_i^* = 0$.

(b) Wenn $s_i < \frac{\eta}{4(m+2)}$, dann $s_i^* = 0$.

# Innere-Punkt-Methoden

**Theorem**

Sei $\Delta = \max\{\sqrt{(m+2)}\|A_B(A_B^t A_B)^{-1}A_N^t\|, 1\}$. Sei $k$ so, dass $\mu^{(k)} < \frac{\eta^2}{32(m+2)^2\Delta}$. Sei $Y_B$ eine Diagonalmatrix, deren Zeilen und Spalten mit $B$ indiziert sind, sodass $y_i^{(k)}$ an Position $(i,i)$ steht. Definiere

$$d_y := Y_B A_B (A_B^t (Y_B)^2 A_B)^{-1} A_N^t y_N^{(k)}$$

und $\tilde{y}_B = Y_B d_y + y_B^{(k)}$. Dann:

(a) $A_B^t \tilde{y}_B = \tilde{c}$.

(b) $\|d_y\| < 1$.

(c) Der Vektor $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{m+2}$, der aus $\tilde{y}_B$ durch Hinzufügen von Nullen entsteht, ist eine optimale Duallösung.

Beweis: (a): $A_B^t(Y_B d_y + y_B^{(k)}) = A_N^t y_N^{(k)} + A_B^t y_B^{(k)} = \tilde{c}$.

Beweis: (b):

$$
\begin{aligned}
\|d_y\| &= \|Y_B A_B (A_B^t (Y_B)^2 A_B)^{-1} A_N^t y_N^{(k)}\| \\
&= \|Y_B A_B (A_B^t (Y_B)^2 A_B)^{-1} \underbrace{A_B^t Y_B Y_B^{-1} A_B (A_B^t A_B)^{-1}}_{=I_n} A_N^t y_N^{(k)}\| \\
&= \underbrace{\|Y_B A_B (A_B^t (Y_B)^2 A_B)^{-1} A_B^t Y_B\|}_{=1} \cdot \|Y_B^{-1} A_B (A_B^t A_B)^{-1} A_N^t y_N^{(k)}\| x \\
&\leq \underbrace{\|Y_B^{-1}\|}_{\leq \frac{4(m+2)}{\eta}} \cdot \underbrace{\|A_B (A_B^t A_B)^{-1} A_N^t\|}_{\leq \frac{\Delta}{\sqrt{m+2}}} \cdot \underbrace{\|y_N^{(k)}\|}_{< \frac{\eta\sqrt{m+2}}{4(m+2)\Delta}} \\
&\leq 1.
\end{aligned}
$$

(c): Nach (a) gilt $\tilde{A}^t \tilde{y} = \tilde{c}$, und nach (b) gilt $\tilde{y}_B > 0$, also $\tilde{y} \geq 0$.
$\Rightarrow$ $\tilde{y}$ ist zulässige Duallösung.
Und: Es gibt Primallösung $x, s$ mit $s_B = 0$.
Komplementärer Schlupf: $\tilde{y}$ ist duale Optimallösung. $\square$