TDI-Systeme

Definition

Eine endliche Menge $\{v_1, \ldots, v_t\}$ von Vektoren heißt **Hilbert-Basis**, wenn jeder ganzzahlige Vektor $\text{cone}(\{v_1, \ldots, v_t\})$ als nicht-negative ganzzahlige Linearkombination von $v_1, \ldots, v_t$ geschrieben werden kann.

TDI-Systeme

Theorem

Jeder rationale polyedrische Kegel wird durch eine ganzzahlige Hilbert-Basis erzeugt.

TDI-Systeme

Theorem

Jeder rationale polyedrische Kegel wird durch eine ganzzahlige Hilbert-Basis erzeugt.

Beweis:

Sei C ein rationaler polyedrische Kegel.
$\Rightarrow$ C wird von rationalen Vektoren $b_1, \ldots, b_k$ erzeugt.
O.B.d.A seien $b_1, \ldots, b_k$ ganzzahlig.
H bestehe aus allen ganzzahligen Vektoren in

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ for } i \in \{1, \ldots, k\} \right\}.$$

$\Rightarrow$ H ist endlich.

Beweis (Fortsetzung):

Behauptung: H ist eine Hilbert-Basis, die C erzeugt.

Denn: Wegen $\{b_1, \ldots, b_k\} \subseteq H \subseteq C$ gilt $C = \text{cone}(H)$.

Sei b ein ganzzahliger Vektor in C.

$\Rightarrow$ Es gibt nichtnegative Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_k$ mit $b = \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i$, also

$$b = \left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \mu_i \rfloor b_i \right) + \sum_{i=1}^{k} (\mu_i - \lfloor \mu_i \rfloor) b_i.$$

$\Rightarrow$ Der Vektor

$$b - \left(\sum_{i=1}^{k} \lfloor \mu_i \rfloor b_i \right) = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i - \lfloor \mu_i \rfloor) b_i$$

ist ganzzahlig und eine Element von P.

$\Rightarrow$ b kann als nicht-negative ganzzahlige Linearkombination von Elementen aus H geschrieben werden.

$\Rightarrow$ H ist eine Hilbert-Basis. $\square$

TDI-Systeme

Notation: Für ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ und eine Fläche F von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, heißt eine Zeile von A **aktiv**, wenn die zugehörige Ungleichung in $Ax \leq b$ von allen Vektoren $x \in F$ mit Gleichheit erfüllt ist.

Theorem:

Ein zulässiges Ungleichungssystem $Ax \leq b$ ist genau dann TDI, wenn für jede minimale Fläche F von $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ die Zeilen von A, die in F aktiv sind, eine Hilbert-Basis bilden.

Beweis:
"⇒:" Sei $Ax \leq b$ TDI. Sei F eine minimale Fläche von P, und seien $a_1, \ldots, a_t$ die Zeilen von A, die für F aktiv sind.
Zu zeigen: $\{a_1, \ldots, a_t\}$ ist eine Hilbert-Basis.
Sei c ein ganzzahliger Vektor in $\mathrm{cone}(\{a_1, \ldots, a_t\})$.
Das Maximum in der Gleichung

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b\} = \min\{b^t y \mid A^t y = c, y \geq 0\} \tag{1}$$

wird von jedem Vektor x in F angenommen.

$Ax \leq b$ ist TDI ⇒ duales LP hat eine ganzzahlige Optimallösung y.
Komplementärer Schlupf: Die Einträge von y, die zu Zeilen von A gehören, die für F nicht aktiv sind, sind 0.
⇒ c ist ganzzahlige nicht-negative Linearkombination von $a_1, \ldots, a_t$.
⇒ $a_1, \ldots, a_t$ ist Hilbert-Basis.

Beweis (Fortsetzung):
"$\Leftarrow$:" Annahme: Für jede minimale Fläche F von P bilden die für F aktiven Zeilen von A eine Hilbert-Basis.
Sei $c \in \mathbb{Z}^n$ ein Vektor, für den die Optima in (1) endlich sind.
Zu zeigen: Das Minimum wird von ganzzahligem Vektor angenommen.

Sei F eine minimale Fläche von P, sodass von jedem Vektor in F das Maximum in (1) angenommen wird.
Es seien $a_1, \ldots, a_t$ die in F aktiven Zeilen von A.
Komplementärer Schlupf: $c \in \mathrm{cone}(\{a_1, \ldots, a_t\})$.

$a_1, \ldots, a_t$ ist Hilbert-Basis $\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $c = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i a_i$
$(\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ kann mit Nullen zu einem Vektor $y \in \mathbb{Z}^m$ mit $y \geq 0$, $A^t y = c$ und $b^t y = x^t A^t y = c^t x$ für alle $x \in F$ erweitert werden.
$\Rightarrow$ y ist eine ganzzahlige duale Optimallösung. $\square$

Theorem

Eine rationales Ungleichungssystem $Ax \leq 0$ ist genau dann TDI, wenn die Zeilen von A eine Hilbert-Basis bilden.

TDI-Systeme

Theorem (Giles und Pullyblank)

Für jedes rationale Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es ein rationales TDI-System $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Der Vektor b kann genau dann ganzzahlig gewählt werden, wenn P ganzzahlig ist.

Theorem (Giles und Pullyblank)

Für jedes rationale Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es ein rationales TDI-System $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Der Vektor b kann genau dann ganzzahlig gewählt werden, wenn P ganzzahlig ist.

Beweis: Wissen schon: Wenn b in dieser Darstellung ganzzahlig ist, dann ist P ganzzahlig.
O.B.d.A sei $P \neq \emptyset$.
Für jede minimale Fläche F von P sei

$$C_F := \{c \in \mathbb{R}^n \mid c^t z = \max\{c^t x \mid x \in P\} \text{ für alle } z \in F\}.$$

$\Rightarrow$ C_F ist ein polyedrischer Kegel.
Denn: Es sei $P = \{\tilde{A}x \leq \tilde{b}\}$. Dann wird C_F von den in F aktiven Zeilen von $\tilde{A}$ erzeugt.

Beweis (Fortsetzung):
Sei F eine minimale Fläche, und es sei $a_1, \ldots, a_t$ eine ganzzahlige Hilbert-Basis, die C_F erzeugt.

Wähle $x_0 \in F$, und definiere $\beta_i := a_i^t x_0$ für $i = 1, \ldots, t$.
$\Rightarrow \beta_i = \max\{a_i^t x \mid x \in P\}$ $(i = 1, \ldots, t)$.

Sei $\mathcal{S}_F$ das Ungleichungssystem $a_1^t x \leq \beta_1, \ldots, a_t^t x \leq \beta_t$. Alle Ungleichungen in $\mathcal{S}_F$ sind für P gültig.

Beweis (Fortsetzung):
Sei $Ax \leq b$ die Vereinigung der Systeme $\mathcal{S}_F$ über alle minimalen Flächen F of P.
$\Rightarrow P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.

Und: Falls $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus P$, dann gibt es eine Stützhyperebene von P, die x^* von P separiert, und diese Stützhyperebeben berührt P in einer minimalen Fläche.
$\Rightarrow$ Es gibt eine Ungleichung in, $Ax \leq b$, die von x^* verletzt wird.

$\Rightarrow P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.
Und: $Ax \leq b$ ist TDI.

Falls P ganzzahlig ist, können alle β_i ganzzahlig gewählt werden, weil alle $x_0 \in F$ ganzzahlig gewählt werden können. $\square$

Vollständige Unimodularität

Definition:

Eine $m \times n$-Matrix A mit Rang m heißt **unimodular**, wenn $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $\det(B) \in \{-1, 1\}$ für alle regulären $m \times m$-Teilmatrizen B von A.

Beobachtung: Eine quadratische unimodulare Matrix hat eine ganzzahlige Inverse (Cramersche Regel)

Vollständige Unimodularität

Definition:

Eine Matrix A heißt **vollständig unimodular** (**totally unimodular (TU)**), wenn jede Unterdeterminante von A (also jede Determinante von quadratischen Untermatrizen von A) 0, -1 oder 1 ist.

Vollständige Unimodularität

Theorem

Sei A vollständig unimodular, und sei b ein ganzzahliger Vektor. Dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

Vollständige Unimodularität

Theorem

Sei A vollständig unimodular, und sei b ein ganzzahliger Vektor. Dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ ganzzahlig.

Beweis: Es reicht zu zeigen: Jede minimale Fläche F von P enthält einen ganzzahligen Vektor.

Jede minimale Fläche von P kann als $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b'\}$ geschrieben werden, wobei $A'x \le b'$ ein Teilsystem von $Ax \le b$ ist.

O.B.d.A: A' hat vollen Zeilenrang.
Nach Vertauschen von Spalten können wir $A' = \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix}$ für eine Matrix U mit $\det(U) \in \{-1, 1\}$ annehmen.

$\Rightarrow x := \binom{U^{-1}b'}{0}$ ist ein ganzzahliger Vektor in F. $\square$

Vollständige Unimodularität

Theorem

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ eine Matrix mit Rang m. Dann gilt: A ist genau dann unimodular, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Vollständige Unimodularität

Theorem

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ eine Matrix mit Rang m. Dann gilt: A ist genau dann unimodular, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Beweis:
"$\Rightarrow$:" Sei A unimodular und b ein ganzzahliger Vektor.

Sei x' eine Ecke von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.
$\Rightarrow$ Es gibt n linear unabh. Ungleichungen in $Ax \leq b, -Ax \leq -b, -I_n x \leq 0$, die von x' mit Gleichheit erfüllt werden.
$\Rightarrow$ Die Spalten von A, die zu Nicht-Null-Einträgen von x' gehören, sind linear unabhängig.
Diese Spaltenmenge kann zu einer regulären $m \times m$-Untermatrix B von A erweitert werden.

$\Rightarrow$ Die Einschränkung von x' auf Koordinaten, die zu B gehören, ist $B^{-1}b$.
Wegen $\det(B) \in \{-1, 1\})$ ist B^{-1} ganzzahlig.
Die anderen Einträge von x' sind Null. $\Rightarrow$ x' ist ganzzahlig.

Beweis (Fortsetzung):

"$\Leftarrow$:" Annahme: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ist für jeden ganzzaligen Vektor b ganzzahlig.
Sei B eine reguläre $m \times m$-Untermatrix von A.

Zu zeigen: $\det(B) \in \{-1, 1\}$.

Cramersche Regel: Es reicht zu zeigen, dass $B^{-1}u$ für jeden ganzzahligen Vektor u ganzzahlig ist.

Sei u ein ganzzahliger Vektor.
Sei y ein ganzzahliger Vektor mit $z := y + B^{-1}u \geq 0$.
$\Rightarrow$ $b := Bz$ ist ganzzahlig.
Ergänze z mit Nullen zu einem Vektor z' mit $Az' = Bz = b$.
$\Rightarrow$ z' ist eine zulässige Basislösung von $Ax = b$.
$\Rightarrow$ z' ist eine Ecke von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.
$\Rightarrow$ z' ist ganzzahlig.
$\Rightarrow$ z ist ganzzahlig.
Daher ist $B^{-1}u = z - y$ ganzzahlig. $\square$