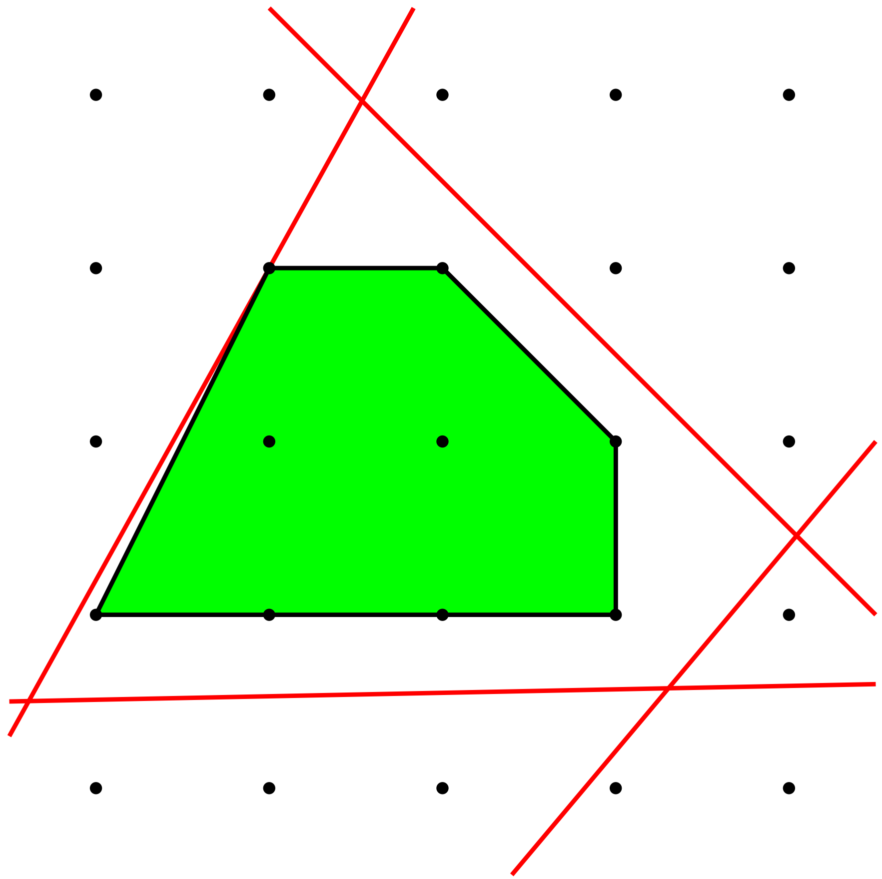
Schnittebenen-Verfahren

Schnittebenen-Verfahren



Schnittebenen-Verfahren

Definition

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Sei M die Menge aller rationaler Halbräume $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \delta\}$ mit $P \subseteq H$. Definiere

$$P' := \bigcap_{H \in M} H_I.$$

Setze $P^{(0)} := P$ und $P^{(i+1)} := \left(P^{(i)}\right)'$ für $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $P^{(i)}$ ist die i-te **Gomory-Chvátal-Stutzung** (**Gomory-Chvátal-truncation**) von P.

Beobachtung: Es gilt $P \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq P_I$ für jedes rationale Polyeder P.
Also: Falls $P = P_I$, dann $P = P' = P_I$.

Schnittebenen-Verfahren

Lemma

Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \delta\}$ ein rationaler Halbraum, sodass c ganzzahlig ist und der ggT der Komponenten von c 1 ist. Dann gilt $H_I = H' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \lfloor \delta \rfloor\}$.

Schnittebenen-Verfahren

Satz

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein rationales Polyeder. Dann gilt

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq \lfloor u^t b \rfloor \text{ für alle } u \geq 0 \text{ mit } u^t A \text{ ganzzahlig}\}.$$

Schnittebenen-Verfahren

Satz

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein rationales Polyeder. Dann gilt

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq \lfloor u^t b \rfloor \text{ für alle } u \geq 0 \text{ mit } u^t A \text{ ganzzahlig}\}.$$

Beweis: "$\subseteq$:" Für jedes $u \geq 0$ gilt $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq u^t b\}$.
Wenn außerdem $u^t A$ ganzzahlig ist, folgt

$$P' \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq u^t b\}_I \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq \lfloor u^t b \rfloor\}.$$

Beweis (Fortsetzung):
"$\supseteq$:" O.B.d.A gelte
$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^t Ax \leq \lfloor u^t b \rfloor$ für alle $u \geq 0$ mit $u^t A$ ganzzahlig$\} \neq \emptyset$.
Dann gilt auch $P \neq \emptyset$.
Sei $z \in X$.
Zu zeigen: z ist für jeden Halbraum $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^t x \leq \delta\}$ mit
$c \in \mathbb{Q}^n$, $\delta \in \mathbb{Q}$ und $P \subseteq H$ in H_I enthalten.
Können annehmen: c ist ganzzahlig und der ggT seiner Einträge ist 1.
Das LP $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ ist zulässig und (durch δ) beschränkt.
$\Rightarrow$
$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b\} = \min\{u^t b \mid A^t u = c, u \geq 0\}.$$

Sei $\tilde{u}$ eine Optimallösung des Minimierungsproblems.
Weil $\tilde{u}^t A = c^t$ ganzzahlig ist, folgt $\tilde{u}^t Az \leq \lfloor \tilde{u}^t b \rfloor$, also

$$c^t z = \tilde{u}^t Az \leq \lfloor \tilde{u}^t b \rfloor \leq \lfloor \delta \rfloor.$$

Voriges Lemma: $z \in H_I$.
Dies gilt für jeden Halbraum H, der P enthält. $\Rightarrow z \in P'$. $\square$

Schnittebenen-Verfahren

Theorem

Sei $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ ein TDI-System. Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Dann gilt $P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$.

Schnittebenen-Verfahren

Theorem

Sei $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ ein TDI-System. Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Dann gilt $P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$.

Beweis: "$P' \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$:"
Jede Gleichung in $Ax \leq b$ liefert einen Halbraum H, und die entsprechende Ungleichung in $Ax \leq \lfloor b \rfloor$ liefert einen Halbraum, der H_I und damit P' enthält.

Schnittebenen-Verfahren

Beweis (Fortsetzung):
"$P' \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$:"
Können annehmen: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\} \neq \emptyset$.
Sei $\tilde{x} \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$, und sei $u \geq 0$, sodass $u^t A$ ganzzahlig ist.

Voriger Satz: Wir müssen zeigen, dass $u^t A\tilde{x} \leq \lfloor u^t b \rfloor$.

Das LP $\max\{u^t Ax \mid Ax \leq b\}$ ist zulässig und (durch $u^t b$) beschränkt.
$\Rightarrow$

$$\max\{u^t Ax \mid Ax \leq b\} = \min\{b^t y \mid y \geq 0, y^t A = u^t A\}.$$

$Ax \leq b$ ist TDI, $u^t A$ ganzzahlig $\Rightarrow$ das Minimum wird von einem ganzzahligen Vektor $\tilde{y}$ angenommen. Daher

$$u^t A\tilde{x} \quad = \quad \tilde{y}^t A\tilde{x} \quad \leq \quad \tilde{y}^t \lfloor b \rfloor \quad \leq \quad \lfloor \tilde{y}^t b \rfloor \quad \leq \quad \lfloor u^t b \rfloor.$$

$\Rightarrow P' \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$. □

Schnittebenen-Verfahren

Korollar

Wenn P ein rationales Polyeder ist, dann ist P' ein Polyeder.

Schnittebenen-Verfahren

Korollar

Wenn P ein rationales Polyeder ist, dann ist P' ein Polyeder.

Beweis: Folgt aus dem vorigen Theorem, weil jedes rationale Polyeder durch ein TDI-System $Ax \geq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ geschrieben werden kann. $\square$

Schnittebenen-Verfahren

Weitere Ergebnisse:

Theorem

Für jedes rationale Polyeder P gibt es eine Zahl t mit $P^{(t)} = P_I$.

Theorem

Für jedes Polytop P gibt es eine Zahl t mit $P^{(t)} = P_I$.

Für eine Polyeder P heißt die kleinste Zahl t mit $P^{(t)} = P_I$ der **Chvátal-Rang** von P.