Wintersemester 2007/08 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Hougardy | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik

11. Übung

1. Der Wert eines Präflusses f sei definiert als:

$$\text{value}(f) := \sum_{e \in \delta^-(t)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(t)} f(e).$$

   (a) Zeige, daß es für jeden maximalen Präfluß f einen maximalen Fluß f' mit $f'(e) \leq f(e)$ (für alle $e \in E(G)$) gibt.

   (b) Gib ein möglichst effizientes Verfahren an, mit dem man aus einem maximalen Präfluß einen maximalen Fluß bestimmen kann. (4 Punkte)

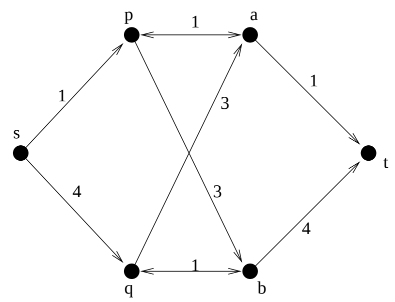

Abbildung 1: Aufgabe 2

2. Bestimme in Abbildung 1 einen maximalen Fluß mit dem Goldberg-Tarjan-Algorithmus. (4 Punkte)

3. Sei $G = (V, E)$ ein kreisfreier gerichteter Graph mit Gewichten $c : E \to \mathbb{R}_+$. Zeige, daß in Zeit $O(n^3)$ ein gerichteter Schnitt in G mit maximalem Gewicht gefunden werden kann. (4 Punkte)
Hinweis: Reduktion auf die Suche nach einem $s-t$–Schnitt mit minimalen Kosten in einem geeigneten Graphen.

bitte wenden

4. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kapazitäten $u : E \to \mathbb{R}_+$. Sei $\emptyset \neq A \subset V$, so daß $\delta(A)$ ein minimaler Schnitt in G ist.

   (a) Zeige, daß $u(\delta(A)) \leq \frac{2}{n} u(E)$ gilt (mit $u(E) := \sum\limits_{e \in E} u(e)$).

   (b) Betrachte das folgende Verfahren: Wähle zufällig eine Kante und kontrahiere sie, wobei eine Kante e mit Wahrscheinlichkeit $\frac{u(e)}{u(E)}$ genommen wird. Wiederhole diese Vorgehensweise, bis nur noch zwei Knoten übrig sind (die Wahlen der einzelnen Kanten sollen dabei unabhängig voneinander sein). Zeige, daß die Wahrscheinlichkeit, daß nie eine Kante aus $\delta(A)$ kontrahiert wird, mindestens $\frac{2}{(n-1)n}$ beträgt.

   (c) Zeige, daß man durch $kn(n-1)$ unabhängige Wiederholungen des Verfahrens aus (b) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - e^{-2k}$ einen minimalen Schnitt in G erhält.

(4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 22.1.2008, **vor** der Vorlesung.