

Einführung in die Diskrete Mathematik

4. Übung

1. Überprüfen Sie, welche der folgenden Aussagen korrekt sind. Das EMST-Problem sei dabei die Einschränkung des MST-Problems auf Instanzen, in denen der Graph zusammenhängend und die Kantengewichte paarweise verschieden sind.
 - (a) Für jede Instanz des EMST-Problems gibt es genau eine optimale Lösung.
 - (b) Das MST-Problem mit ganzzahligen Kantengewichten und das EMST-Problem sind äquivalent.
 - (c) Der Kontraktions-Algorithmus (s.u.) löst das MST-Problem korrekt.
 - (d) Der Kontraktions-Algorithmus löst das EMST-Problem korrekt.

Der Kontraktions-Algorithmus für das MST-Problem läuft wie folgt ab: Wähle zu jedem Knoten eine billigste inzidente Kante, kontrahiere alle diese Kanten, und iteriere das Verfahren bis nur ein Knoten übrig ist. Das Ergebnis besteht aus allen im Laufe des Verfahrens gewählten Kanten (bzw. deren Urbildern unter der Kontraktionsabbildung). (4 Punkte)

2. Die in der Vorlesung eingeführten 2-Heaps können leicht auf d -Heaps verallgemeinert werden.
 - (a) Wie verändert sich die Laufzeit der Operationen INSERT, DECREASEKEY und DELETEMIN in Abhängigkeit von d ?
 - (b) Wie sollte man d (in Abhängigkeit von $n = |V(G)|$ und $m = |E(G)|$) wählen, damit Prim's Algorithmus mit d -Heaps möglichst schnell ist?

(4 Punkte)

3. (a) Professor Wrong behauptet, in einem Fibonacci-Heap sei die maximale Länge eines Pfades $O(\log n)$, wobei n die Anzahl seiner Elemente (Knoten) ist. Widerlegen Sie ihn.

- (b) Professor Dubious schlägt vor, Prim's Algorithmus auf das **MINIMUM WEIGHT ROOTED ARBORESCENCE PROBLEM** anzupassen: hierbei wird anfangs $T := (\{r\}, \emptyset)$ gewählt und jeweils eine billigste Kante aus $\delta_G^+(V(T))$ zu T hinzugefügt. Prüfen Sie, ob dieses Verfahren das Problem korrekt löst.

(4 Punkte)

4. Kann man in linearer Zeit entscheiden, ob ein gerichteter Graph eine aufspannende Arboreszenz enthält? (4 Punkte)

Hinweis: Um eine mögliche Wurzel zu bestimmen, fange man bei einem beliebigen Knoten an und gehe so lange wie möglich Kanten rückwärts entlang. Erreicht man einen Kreis, kontrahiere man ihn.

Abgabe: Dienstag, den 18.11.2008, **vor** der Vorlesung.