Wintersemester 2008/09
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
7. Übung

1. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk. Der Wert v eines maximalen s-t-Flusses in (G, u) sei positiv. Betrachten Sie folgende Aussagen für eine Kante $e \in E(G)$ mit $u(e) > 0$:

   (a) Jede Verringerung von $u(e)$ bewirkt eine Verringerung von v.

   (b) Jede Vergrößerung von $u(e)$ bewirkt eine Vergrößerung von v.

   (c) Das Löschen von e verringert v mindestens so stark wie das Löschen jeder anderen Kante.

   (d) e gehört zu einem minimalen s-t-Schnitt.

   (e) e wird von jedem maximalen s-t-Fluss f saturiert (d.h. $f(e) = u(e)$).

   Welche dieser Aussagen sind äquivalent zueinander? Gilt bei nicht äquivalenten Paaren von Aussagen wenigstens eine der beiden Implikationen? (4 Punkte)

2. Man nenne einen s-t-Präfluss f maximal, wenn $\mathrm{ex}_f(t)$ maximal ist.

   (a) Man zeige, dass es für jeden maximalen Präfluss f einen maximalen Fluss f' mit $f'(e) \leq f(e)$ für alle $e \in E(G)$ gibt.

   (b) Man zeige, wie man in $O(nm)$ Zeit einen maximalen Präfluss in einen maximalen Fluss umwandeln kann. (4 Punkte)

3. Sei G ein Digraph, $s, t \in V(G)$ mit $s \neq t$, und $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Wie kann man in polynomieller Zeit eine Menge $X \subseteq V(G) \setminus \{t\}$ mit $s \in X$ finden, für die $c(\delta^+(X)) - c(\delta^-(X))$ minimal ist? Können Sie eine lineare Laufzeit erreichen? (4 Punkte)

4. Im Tagebau sollen Rohstoffe gefördert werden. Jeder Kubikmeter Gestein wird durch einen Knoten in einem gerichteten Graphen G modelliert. Eine Kante $(v, w) \in E(G)$ bedeutet, dass v nicht abgebaut werden kann, ohne dass auch w abgebaut wird (zum Beispiel weil w oberhalb von v liegt). Der Abbau von einem Kubikmeter Gestein $v \in V(G)$ bringt einen (möglicherweise negativen) Profit $p(v)$. Wie bestimmt man effizient eine abzubauende Menge $X \subseteq V(G)$, die den maximalen Profit $p(X)$ bringt? (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 9.12.2008, **vor** der Vorlesung.