Wintersemester 2008/09 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Hougardy Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Algorithmische Mathematik I

2. Übung

1. Seien z_1 und z_2 zwei natürliche Zahlen mit identischer Ziffernfolge $x_{n-1}x_{n-2}\dots x_0$ bezüglich unterschiedlicher Basen b_1 und b_2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (a) Falls $b_1 > b_2$, so ist $z_1 > z_2$.

   (b) Falls $z_1 > z_2$, so ist $b_1 > b_2$.

   (c) Falls b_1 b_2 teilt, so teilt z_1 z_2.

   (d) Falls z_1 z_2 teilt, so teilt b_1 b_2.

   (e) $z_1 + z_2$ besitzt in der Basis $b_1 + b_2$ dieselbe Ziffernfolge wie z_1 bzw. z_2.

   (f) $z_1 \cdot z_2$ besitzt in der Basis $b_1 + b_2$ dieselbe Ziffernfolge wie z_1 bzw. z_2.

   (6 Punkte)

2. Zweierkomplement

   (a) Schreiben Sie die Zahl -25 für $n = 8$ und $n = 16$ in Zweierkomplement-Darstellung.

   (b) Sei z eine negative Zahl in n-stelliger Zweierkomplement-Darstellung. Welche positive Zahl entsteht durch Invertieren aller Stellen in der Zahlendarstellung von z?

   (c) Welche negativen Zahlen sind bei n-stelliger Zweierkomplement-Darstellung bis auf die Vorzeichenstelle identisch mit ihrem positiven Gegenstück?

   (d) Gegeben sei eine Zahl $(z_{n-1}z_{n-2}\dots z_0)_{K_2}$ in Zweierkomplement-Darstellung. Wie sieht dieselbe Zahl aus, wenn $n+1$ Stellen für das Zweierkomplement zur Verfügung stehen? Unterscheiden Sie zwischen positiven und negativen Zahlen und beweisen Sie Ihre Antwort.

   (e) Beschreiben Sie eine effiziente Methode zur Bestimmung des Zweierkomplementes einer positiven Zahl, bei der jede Stelle der Binärdarstellung nur einmal betrachtet wird. (Bei Berechnung des Zweierkomplements gemäß Definition wird zunächst das Einerkomplement berechnet und im Anschluss 1 addiert. Dadurch werden alle Stellen bis zu zwei Mal betrachtet.) (12 Punkte)

3. Gegeben seien die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 1.24x_1 + 2.47y_1 &= 0.728, \\ 4.01x_1 + 7.99y_1 &= 2.35, \end{aligned} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{aligned} 0.0124x_2 + 81.3y_2 &= -25.4, \\ 10.4x_2 + 14.5y_2 &= 245, \end{aligned}$$

mit den exakten Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.213794565\ldots, \\ y_1 &= -1.820690389\ldots, \end{aligned} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{aligned} x_2 &= 23.99838629\ldots, \\ y_2 &= -0.316083395\ldots \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie Näherungslösungen mittels Auflösen nach x und y in 3-stelliger Arithmetik, d.h. runden Sie nach jeder elementaren Rechenoperation auf 3 wesentliche Ziffern, d.h. zur nächsten Zahl der Form $x.yz \cdot 10^i$ mit $i \in \mathbb{Z}$.

(b) Schreiben Sie die oben angegebenen Gleichungen in der Form $y = m \cdot x + b$ und ermitteln Sie die Lösungen graphisch. Interpretieren Sie die in (a) erhaltenen Ergebnisse. (8 Punkte)

4. Schreiben Sie ein C++-Programm `quintary`, das eine natürliche Zahl im Dezimalsystem in das Fünfersystem (Basis $b = 5$) umwandelt ohne sich dabei rekursiv selbst aufzurufen. Dabei soll die Ausgabe des Ergebnisses in der Funktion `quintary` selbst erfolgen. Benutzen Sie den Rahmen:

```
# include <iostream>

using namespace std;

void quintary(int i)

main()
{
      int Zahl;

      cin >> Zahl;
      quintary(Zahl);
}
```

(8 Punkte)

5. Bestimmen sie alle natürlichen Zahlen bis 10000, die sowohl im Fünfersystem als auch im Dreiersystem Darstellungen haben, in denen nur Nulllen und Einsen vorkommen. Beweisen Sie die Vollständigkeit Ihrer Lösung. Für den Beweis sollen weniger als 100 Zahlen von einem Zahlensystem in ein anderes konvertiert werden. (6 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 29.10.2008, **vor** der Vorlesung.