Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik

5. Übung

1. Ein Telekommunikationsnetzwerk werde durch einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ modelliert, dessen Kanten voneinander unabhängige Ausfallwahrscheinlichkeiten $p : E \to [0, 1]$ haben. Wie findet man in Zeit $O(m + n \log n)$ einen spannenden Baum, der die Wahrscheinlichkeit, daß alle seine Kanten funktionieren, maximiert? (4 Punkte)

2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$.
Wie lassen sich die folgenden Probleme möglichst effiziente lösen?

   (a) Sei $v \in V$ ein Knoten. Gesucht ist ein spannender Baum, in dem v kein Blatt ist und der unter allen spannenden Bäumen, in denen v kein Blatt ist, minimales Gewicht hat.

   (b) Man bestimme die Menge aller Kanten $e \in E$, für die es einen spannenden Baum T_e mit minimalem Gewicht gibt, so daß e in T_e enthalten ist.

   (c) Man bestimme einen spannenden zusammenhängenden Teilgraphen von G mit minimalem Gewicht.

   (d) Man bestimme einen spannenden Baum T für G, dessen maximales Kantengewicht unter allen spannendem Bäumen für G minimal ist. (4 Punkte)

3. Zeigen Sie, daß es Folgen von Heap-Operationen gibt, so daß in einem Fibonacci-Heap die maximale Pfadlänge in einer Arboreszenz $\Theta(n)$ ist, wenn n die Zahl der Elemente ist. (4 Punkte)

4. Man zeige, daß K_n (der vollständige ungerichtete Graph auf der Knotenmenge $V(G) = \{1, \ldots, n\}$) n^{n-2} Spannbäume hat (wobei zueinander isomorphe Spannbäume nicht miteinander identifiziert werden). (4 Punkte)
Hinweis: Betrachte die folgende Zuordnung: Sei T ein Baum mit $V(T) = \{1, \ldots, n\}$ ($n \geq 3$), v ein Blatt von T mit kleinstem Index und a_1 der Nachbar von v in T. Dann definiere rekursiv $a(T) := (a_1, \ldots, a_{n-2})$, wobei $(a_2, \ldots, a_{n-2}) := a(T - v)$.

Abgabe: Dienstag, den 17.11.2009, **vor** der Vorlesung.