

Einführung in die Diskrete Mathematik

6. Übung

1. Sei T ein zufällig mit Gleichverteilung „gewählter“ Baum auf $V(T) = \{1, \dots, n\}$. Unabhängig von der Wahl des Baumes sei ein Knoten $v \in \{1, \dots, n\}$ randomisiert mit Gleichverteilung gewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P_n , daß v ein Blatt ist. Was ist $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$? (4 Punkte)
2. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender gerichteter Graph mit Kantenlängen $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s, t \in V$. Ferner sei $h : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine (heuristische) untere Schranke für die Distanz zu t , d.h. für alle Knoten $v \in V$ gilt $h(v) \leq \text{dist}_{G,c}(v, t)$. Für alle Kanten $(u, v) \in E$ gelte $h(u) \leq h(v) + c((u, v))$. Dann berechnet der folgende Algorithmus A die Länge eines kürzesten s - t -Weges.

Algorithmus A ($G, c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, s, t, h : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

```
1  for  $x \in V \setminus \{s\}$  do  $x.\text{val} := +\infty$ 
2   $s.\text{val} := h(s)$ 
3   $Q := V$ 
4  while  $Q \neq \emptyset$  do
5     $x :=$  Knoten in  $Q$ , der  $\text{.val}$  minimiert
6    if  $x = t$  then return  $x.\text{val}$ 
7     $Q := Q \setminus \{x\}$ 
8    for  $y \in N(x) \cap Q$  do
9       $y.\text{val} := \min \{y.\text{val}, x.\text{val} + c((x, y)) + h(y) - h(x)\}$ 
```

(4 Punkte)

3. Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus für das folgende Problem (mit Bestimmung der asymptotischen Laufzeit):

Gegeben seien ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s, t \in V(G)$. Gesucht ist ein s - t -Weg, dessen längste Kante möglichst kurz ist. (4 Punkte)

4. Zeigen Sie, daß man zu einem gegebenen ungerichteten Graphen G mit positiven Kantengewichten für zwei Knoten $s, t \in V(G)$ einen zweitkürzesten s - t -Weg (falls vorhanden) in polynomieller Zeit finden kann. Mit einem zweitkürzesten s - t -Weg ist dabei ein Weg gemeint, der unter allen s - t -Wegen, die länger sind als ein kürzester s - t -Weg, kürzeste Länge hat. (4 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie zunächst einen gerichteten Graphen G' mit $V(G') = V(G)$, der eine Kante (v, w) genau dann enthält, wenn es einen kürzesten s - t -Weg in G gibt, der $\{v, w\}$ enthält und dabei (bei s beginnend) zuerst v besucht (für $\{v, w\} \in E(G)$).

Abgabe: Dienstag, den 24.11.2009, **vor** der Vorlesung.