

## Einführung in die Diskrete Mathematik

## 8. Übung

1. Sei  $G$  ein gerichteter Graph mit Kantenkapazitäten  $u : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ . Wie kann man in polynomieller Zeit in  $G$  einen Schnitt mit minimaler Kapazität finden, der unter allen Schnitten mit minimaler Kapazität möglichst wenige Kanten enthält? (4 Punkte)  
Hinweis: Modifizieren Sie die Kantenkapazitäten auf geeignete Weise.
2. Sei  $(G, u, s, t)$  ein Flußnetzwerk, und seien  $\delta^+(X)$  und  $\delta^+(Y)$  minimale  $s$ - $t$ -Schnitte in  $(G, u)$ . Zeigen Sie, daß dann auch  $\delta^+(X \cap Y)$  und  $\delta^+(X \cup Y)$  minimale  $s$ - $t$ -Schnitte in  $(G, u)$  sind. (4 Punkte)
3. Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph mit Kapazitäten  $u : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Sei  $\emptyset \neq A \subset V$ , so daß  $\delta(A)$  ein minimaler Schnitt in  $G$  ist.
  - (a) Zeigen Sie, daß  $u(\delta(A)) \leq \frac{2}{n}u(E)$  gilt (mit  $u(E) := \sum_{e \in E} u(e)$ ).
  - (b) Betrachten Sie das folgende Verfahren: Wählen Sie zufällig eine Kante und kontrahieren Sie sie, wobei eine Kante  $e$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{u(e)}{u(E)}$  genommen wird. Wiederholen Sie diese Vorgehensweise, bis nur noch zwei Knoten übrig sind (die Wahlen der einzelnen Kanten sollen dabei unabhängig voneinander sein). Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit, daß nie eine Kante aus  $\delta(A)$  kontrahiert wird, mindestens  $\frac{2}{(n-1)n}$  beträgt.
  - (c) Zeigen Sie, daß man durch  $kn(n-1)$  unabhängige Wiederholungen des Verfahrens aus (b) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens  $1 - e^{-2k}$  einen minimalen Schnitt in  $G$  erhält. (4 Punkte)
4. Sei  $G$  ein gerichteter Graph mit unteren und oberen Kapazitäten  $l, u : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$  für  $e \in E(G)$ . Zeigen Sie, daß es genau dann eine Zirkulation  $f$  mit  $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$  für alle  $e \in E(G)$  gibt, wenn

$$\sum_{e \in \delta^-(X)} l(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \quad \text{für alle } X \subseteq V(G)$$

gilt.

(4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 8.12.2009, **vor** der Vorlesung.