Wintersemester 2010/11 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. J. Vygen | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
4. Übung

1. Sei G ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Seien $s, t \in V(G)$, $L \subseteq V(G)$ mit $L \neq \emptyset$, so dass von jedem Knoten aus **jedes** Element von L erreichbar ist, und $\pi(v) := \min \left\{0, \min_{l \in L} \left(\mathrm{dist}_{(G,c)}(t,l) - \mathrm{dist}_{(G,c)}(v,l)\right)\right\}$ für $v \in V(G)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) π ist ein zulässiges Potential.

   (b) Jeder kürzeste s-t-Weg in (G, c_π) ist ein kürzester s-t-Weg in (G, c).

   (c) $\left\{v \in V(G) \mid \mathrm{dist}_{(G,c_\pi)}(s,v) < \mathrm{dist}_{(G,c_\pi)}(s,t)\right\} \subseteq \left\{v \in V(G) \mid \mathrm{dist}_{(G,c)}(s,v) < \mathrm{dist}_{(G,c)}(s,t)\right\}$.

   (4 Punkte)

   Bemerkung: Wenn man eine große Anzahl von Kürzeste-Wege-Berechnungen im selben Graphen aber mit unterschiedlichen Start- und Endkonten durchführen muss, kann es sich lohnen, vorher Abstände zu einer gewissen Menge L von Knoten zu berechnen, die als Orientierungspunkte dienen. Unter Ausnutzung der in diesem Satz bewiesenen Eigenschaften kann man damit die Aufrufe des DIJKSTRA-ALGORITHMUS in der Praxis beschleunigen.

2. Sei G ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Es sei außerdem eine Lösung des KÜRZESTE-WEGE-PROBLEMS FÜR ALLE PAARE für diese Instanz gegeben, für je zwei Knoten s und t sei also die Länge eines kürzesten s-t-Weges in (G, c) bekannt. Sei nun $e_0 \in E(G)$ und $\delta > 0$, und es sei $c' : E(G) \to \mathbb{R}$ definiert durch $c'(e_0) = c(e_0) - \delta$ und $c'(e) = c(e)$ für $e \in E(G) \setminus \{e_0\}$. In welcher Zeit kann man überprüfen, ob c' ebenfalls konservativ ist? Und falls c' konservativ ist, wie kann man in Zeit $O(n^2)$ eine Lösung für das KÜRZESTE-WEGE-PROBLEM FÜR ALLE PAARE in (G, c') berechnen?

   (4 Punkte)

3. Die Zeitbedingungen („timing constraints“) eines Logikchips lassen sich durch einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ darstellen. Dabei entsprechen die Knoten den Speicherelementen und die Kanten gewissen durch die kombinatorische Logik definierten Wegen, während die Gewichte (Schätzungen der) Signallaufzeiten entsprechen. Eine wichtige Aufgabe des Chip-Designs ist es, einen optimalen Takt-Zeitplan zu finden, d.h. eine möglichst kleine Zahl T und eine Abbildung $a : V(G) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $a(v) + c((v, w)) \leq a(w) + T$ für alle $(v, w) \in E(G)$. Hierbei ist T die Zykluszeit des Chips, und $a(v)$ bzw. $a(v) + T$ sind die Startzeit bzw. die späteste zulässige Ankunftszeit des Signals in v.

   a) Reduzieren Sie das Problem, das optimale T zu finden, auf das MINIMUM-MEAN-CYCLE-PROBLEM.

   b) Zeigen Sie, wie man die Zahlen $a(v)$ einer optimalen Lösung effizient bestimmen kann.

   c) Typischerweise sind einige der Zahlen $a(v)$ vorab festgelegt. Man zeige, wie man in diesem Fall das Problem lösen kann. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 9.11.2010, **vor** der Vorlesung.