Wintersemester 2010/11 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. J. Vygen Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
5. Übung

1. Man beweise den Zirkulationssatz von Hoffman: Gegeben seien ein gerichteter Graph G und untere bzw. obere Schranken $l, u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$. Dann gibt es genau dann eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e)$ für alle $v \in V(G)$, wenn
$$\sum_{e \in \delta^-(X)} l(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \text{ für alle } X \subseteq V(G) \text{ gilt.}$$
(4 Punkte)

2. Sei G ein gerichteter oder ungerichteter Graph. Wir bezeichnen für zwei Knoten $s, t \in V(G)$ mit λ_{st} die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter s-t-Wege in G. Seien nun $x, y, z \in V(G)$ drei verschiedene Knoten und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \leq \lambda_{xy}$, $\beta \leq \lambda_{xz}$ und $\alpha + \beta \leq \max\{\lambda_{xy}, \lambda_{xz}\}$. Zeigen Sie, dass es dann α x-y-Wege und β x-z-Wege gibt, so dass diese $\alpha + \beta$ Wege paarweise kantendisjunkt sind. (4 Punkte)

3. Beschreiben Sie ein effizientes Verfahren, möglichst mit Laufzeit $O(n^2 m)$, das zu einem gegebenen ungerichteten Graphen mit n Knoten und m Kanten den Knotenzusammenhang berechnet. (4 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass der Wert eines blockierenden s-t-Flusses in einem Netzwerk (G, u, s, t) mit azyklischem Graphen G höchstens um den Faktor $|V(G)|$ kleiner ist als der Wert eines maximalen Flusses. Zeigen Sie außerdem, dass diese Schranke bis auf einen konstanten Faktor bestmöglich ist. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 16.11.2010, **vor** der Vorlesung.