Wintersemester 2010/11 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. J. Vygen Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik

7. Übung

1. Sei G ein ungerichteter Graph mit Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Sei $\emptyset \neq A \subset V(G)$, so dass $\delta(A)$ ein minimaler Schnitt (d.h. ein Schnitt mit minimaler Kapazität) in G ist.

   (a) Zeigen Sie, dass $u(\delta(A)) \leq \frac{2}{n} u(E(G))$ gilt (mit $u(E(G)) := \sum_{e \in E(G)} u(e)$).

   (b) Betrachten Sie das folgende Verfahren: Wählen Sie zufällig eine Kante und kontrahieren Sie sie, wobei eine Kante e mit Wahrscheinlichkeit $\frac{u(e)}{u(E(G))}$ genommen wird. Wiederholen Sie diese Vorgehensweise, bis nur noch zwei Knoten übrig sind (die Wahlen der einzelnen Kanten sollen dabei unabhängig voneinander sein). Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass nie eine Kante aus $\delta(A)$ kontrahiert wird, mindestens $\frac{2}{(n-1)n}$ beträgt.

   (c) Zeigen Sie, dass man durch $kn(n-1)$ unabhängige Wiederholungen des Verfahrens aus (b) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - e^{-2k}$ einen minimalen Schnitt in G erhält. (4 Punkte)

2. Sei (G, u, c, b) ein Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluss f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so dass π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.

   (a) Man beweise, dass eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:
   $$b(X) + \sum_{e \in \delta^-(X): c_\pi(e) < 0} u(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X): c_\pi(e) \leq 0} u(e). \qquad (*)$$

   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, dass es keine solche gibt.

   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluss mit minimalen Kosten in $O(n^3)$ Zeit findet. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 30.11.2010, **vor** der Vorlesung.