Wintersemester 2011/12
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik

5. Übung

1. Sei G ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$.
   Wie lassen sich die folgenden Probleme möglichst effizient lösen?

   (a) Sei $v \in V(G)$ ein Knoten. Gesucht ist ein aufspannender Baum, in dem v kein Blatt ist und der unter allen aufspannenden Bäumen, in denen v kein Blatt ist, minimales Gewicht hat.

   (b) Man bestimme die Menge aller Kanten $e \in E(G)$, für die es einen aufspannenden Baum T_e mit minimalem Gewicht gibt, so daß e in T_e enthalten ist.

   (c) Man bestimme einen aufspannenden zusammenhängenden Teilgraphen von G mit minimalem Gewicht.

   (d) Man bestimme einen aufspannenden Baum T für G, dessen maximales Kantengewicht minimal ist. (4 Punkte)

2. Ein Telekommunikationsnetzwerk werde durch einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ modelliert, dessen Kanten voneinander unabhängige Ausfallwahrscheinlichkeiten $p : E \to [0, 1]$ haben. Wie findet man in Zeit $O(m + n \log n)$ einen spannenden Baum, der die Wahrscheinlichkeit, daß alle seine Kanten funktionieren, maximiert? (4 Punkte)

3. Betrachten Sie das Problem, von 0 bis $k < 2^n$ hochzuzählen, wobei die einzelnen Zwischenstände in einer n-Bit-Zahl abgespeichert werden sollen. Das Ändern eines einzelnen Bits soll eine Zeiteinheit kosten. Zeigen Sie, daß dieses Problem mit amortisierten Kosten von $2k$ Zeiteinheiten gelöst werden kann. (4 Punkte)

4. (a) Zeigen Sie, daß es Folgen von Heap-Operationen gibt, so daß in einem Fibonacci-Heap die maximale Pfadlänge in einer Arboreszenz $\Theta(n)$ ist, wenn n die Zahl der Elemente ist.

   (b) Zeigen Sie, daß zwei Fibonacci-Heaps mit n_1 und n_2 Elementen in $O(\log(n_1 + n_2))$ Zeit verschmolzen werden können. Das Ergebnis soll also ein Fibonacci-Heap sein, der alle $n_1 + n_2$ Elemente enthält. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 15.11.2011, **vor** der Vorlesung.

Hinweis der Mentorengruppe:
Im kommenden Mentorentreffen am Donnerstag, den 10. 11. um 18 Uhr s.t. im Konferenzraum, werden Maxim Janzen und Philipp Ochsendorf einige grundlegende Datenstrukturen zum Speichern von Graphen vorstellen und die jeweiligen Vor- und Nachteile beleuchten. Im Anschluss wird das Gelernte an einem praktischen Beispiel angewendet.