

Einführung in die Diskrete Mathematik

6. Übung

1. Sei T ein Baum mit n Knoten. Ein Knoten $v \in V(T)$ heißt Zentralknoten, wenn die Zusammenhangskomponenten, die nach Herausnahme von v entstehen, jeweils höchstens $\frac{n}{2}$ Knoten enthalten. Zeigen Sie, daß ein Baum stets einen Zentralknoten enthält. Geben Sie außerdem ein möglichst effizientes Verfahren an, um einen solchen Knoten zu finden (mit Laufzeitanalyse). (4 Punkte)
2. Beweisen oder widerlegen sie die folgende Aussage: Entfernt man aus einem zusammenhängenden ungerichteten Graphen mit Kantengewichten sukzessive die schwerste Kante, deren Herausnahme nicht den Zusammenhang des Graphen zerstört, so bleibt am Ende ein minimal spannender Baum übrig. (4 Punkte)
3. Sei G ein Branching mit n Knoten und m Kanten, Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein geordnetes Paar von zwei verschiedenen Knoten v und w von G auszuwählen, so daß der um eine Kante ergänzte Graph $(V(G), E(G) \dot{\cup} \{(v, w)\})$ ein Branching ist? (4 Punkte)
4. Sei G ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$, und sei $v \in V(G)$, so dass alle Knoten in G von v aus erreichbar sind. Es bezeichne A die Menge aller gewichtsminimalen aufspannenden Arboreszenzen mit Wurzel v , und B die Menge aller Kürzeste-Wege-Arboreszenzen mit Wurzel v (d.h. für jedes $T \in B$ und jeden Knoten $w \in V$ ist der v - w -Weg in T ein kürzester v - w -Weg in G). Gilt stets $A \subseteq B$? Gilt stets $B \subseteq A$? (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 22.11.2011, **vor** der Vorlesung.