Einführung in die Diskrete Mathematik
8. Übung

1. Man zeige, dass der Push-Relabel-Algorithmus $O(n^2m)$ nichtsaturierende Pushes durchführt, unabhängig von der Wahl des aktiven Knotens v in Schritt ③. (4 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie $\Phi := \sum_{v \text{ aktiv}} \psi(v)$.

2. Sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit MA-Reihenfolge $v_1, \ldots, v_n$. Für $u, v \in V(G)$ sei κ_{uv}^G die maximale Anzahl intern disjunkter u-v-Wege in G. Beweisen Sie, dass dann $\kappa_{v_{n-1}v_n}^G = |\delta_G(v_n)|$ gilt. (6 Punkte)

   Hinweis: Man beweise mittels Induktion, dass $\kappa_{v_jv_i}^{G_{ij}} = |\delta_{G_{ij}}(v_j)|$ für alle $1 \le i < j \le n$ gilt, wobei $G_{ij} = G[\{v_1, \ldots, v_i\} \cup \{v_j\}]$. Dazu nehme man o.B.d.A. $\{v_j, v_i\} \notin E(G)$ an (überlegen Sie auch, warum das keine Einschränkung ist), wähle eine inklusionsminimale Menge $Z \subseteq \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$, die v_j und v_i trennt, und lasse $h \le i$ die maximale Zahl sein, so dass $v_h \notin Z$ und v_h mit v_i oder v_j benachbart ist (falls es ein solches h gibt).

3 Man beweise den Zirkulationssatz von Hoffman: Gegeben seien ein gerichteter Graph G und untere bzw. obere Schranken $l, u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \le u(e)$ für alle $e \in E(G)$. Es gibt genau dann eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \le f(e) \le u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e\in\delta^-(v)} f(e) = \sum_{e\in\delta^+(v)} f(e)$ für alle $v \in V(G)$, wenn

$$\sum_{e\in\delta^-(X)} l(e) \le \sum_{e\in\delta^+(X)} u(e) \quad \text{für alle } X \subseteq V(G) \text{ gilt.}$$

(5 Punkte)

4. Man betrachte eine Verallgemeinerung des Minimum-Cost-Flow-Problems, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind (d.h. $u(e) = \infty$ für manche Kanten e). Eine Instanz (G, u, b, c) heißt *unbeschränkt*, wenn es für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ einen b-Fluss f in (G, u) gibt mit $c(f) < \gamma$.
   (a) Man zeige, dass eine Instanz genau dann unbeschränkt ist, wenn es einen b-Fluss in (G, u) gibt und ein negativer Kreis existiert, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.
   (b) Man zeige, wie man in $O(n^3 + m)$-Zeit entscheiden kann, ob eine Instanz unbeschränkt ist.
   (c) Man zeige, dass in einer nicht unbeschränkten Instanz jede unendliche Kapazität auf äquivalente Weise durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann. (2+1+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 4.12.2014, vor der Vorlesung.