Wintersemester 2014/15
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
9. Übung

1. Aufgrund eines erst jetzt entdeckten Fehlers im Buchungssystem hat ein großes Hotel viele Buchungen angenommen, ohne die Verfügbarkeit freier Zimmer zu prüfen. Jede Buchung betrifft einen bestimmten Zeitraum; es wird aber immer nur ein Zimmer benötigt. Alle Zimmer sind gleichwertig, dennoch wurden die Buchungen zu unterschiedlichen Preisen vorgenommen. Das Hotel möchte nun einigen Kunden absagen, so dass die freien Zimmer ausreichen und möglichst wenige Einnahmen verlorengehen. Wie würden Sie dieses Problem lösen? Kann man erreichen, dass kein Gast während seines Aufenthalts umziehen muss? (4 Punkte)

   Hinweis: Formulieren Sie dies als Minimum-Cost-Flow-Problem, wobei jeder Tag einem Knoten entspricht.

2. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluss f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so dass π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.

   (a) Man beweise, dass eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:
   $$b(X) + \sum_{e\in\delta^-(X): c_\pi(e)<0} u(e) \le \sum_{e\in\delta^+(X): c_\pi(e)\le 0} u(e). \qquad (*)$$

   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, dass es keine solche gibt.

   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluss mit minimalen Kosten in $O(m + n^3)$ Zeit findet. (3+2+2 Punkte)

3. Betrachten Sie die Einschränkung des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS auf Instanzen (G, u, b, c), in denen b ganzzahlig ist und $u(e) = 1$ für alle $e \in E(G)$ gilt. Zeigen Sie, dass der MINIMUM-MEAN-CYCLE-CANCELLING-ALGORITHMUS auf diesen Instanzen eine Laufzeit von $O(m^2n^2 \log n)$ erreicht, wobei n die Zahl der Knoten und m die Zahl der Kanten sei. (5 Punkte)

   Hinweis: Teilen Sie den Algorithmus in Phasen auf, wobei eine Phase aus einer maximalen Folge von Iterationen bestehe, in denen auf keiner Kante der Flusswert zweimal geändert wird. Dann suche man eine erste Phase i, so dass $k_j \le 2k_i$ für alle $j = i, \dots, i + n(\lceil \log n \rceil + 1)$ gilt, wobei k_i die Zahl der Iterationen in Phase i sei.

4. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS, für das eine zulässige Lösung existiere. Zeigen Sie, dass es dann eine kostenminimale Lösung f gibt, für die eine Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ existiert, so dass der $(V(G), F)$ zugrundeliegende ungerichtete Graph kreisfrei ist und auf allen Kanten $e \in E(G) \setminus F$ gilt: $f(e) \in \{0, u(e)\}$. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 11.12.2014, vor der Vorlesung.