Einführung in die Diskrete Mathematik
11. Übung

1. Das gebrochene b-Matching-Problem wird folgendermaßen definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e\in\delta(v)} f(e) \leq b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e\in E(G)} c(e)f(e)$ maximiert.

   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein Minimum-Cost-Flow-Problem lösen kann.

   (b) Man zeige, dass, wenn b und u ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung f existiert (d.h. $2f(e)$ muss für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (3+2 Punkte)

2. (a) Sei $S = \{1, \ldots, n\}$ und $0 \leq k < \frac{n}{2}$. Sei A bzw. B die Familie aller k-elementigen bzw. $(k+1)$-elementigen Teilmengen von S. Man bilde den bipartiten Graphen

   $$G = (A \dot\cup B, \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B, a \subset b\})$$

   und beweise, dass G ein A überdeckendes Matching besitzt.

   (b) Folgern Sie daraus Sperners Lemma: Die maximale Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge mit der Eigenschaft, dass keine der Teilmengen eine andere enthält, ist $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. (2+2 Punkte)

3. Es sei G ein azyklischer gerichteter Graph.

   (a) Beweisen Sie, dass die minimale Anzahl von Wegen in G, von denen alle Knoten überdeckt werden, gleich der maximalen Anzahl von Knoten ist, von denen keine zwei auf demselben Weg liegen.

   (b) Zeigen Sie, dass die minimale Anzahl von gerichteten Schnitten in G, von denen alle Kanten überdeckt werden, gleich der maximalen Länge eines Weges in G ist. (2+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 8.1.2015, vor der Vorlesung.