Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
4. Übung

1. Sei n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass es genau $(n+1)^{n-1}$ Branchings auf der Knotenmenge $\{1,\ldots,n\}$ gibt. (3 Punkte)

2. Sei T ein zufälliger mit Gleichverteilung bestimmter Baum auf der Knotenmenge $V(T) = \{1,\ldots,n\}$. Unabhängig von der Wahl des Baumes sei ein Knoten $v \in \{1,\ldots,n\}$ randomisiert mit Gleichverteilung gewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P_n, dass v ein Blatt ist. Was ist $\lim_{n\to\infty} P_n$? (4 Punkte)

3. a) Zeigen Sie, dass es Folgen von Heap-Operationen gibt, so dass in einem Fibonacci-Heap die maximale Pfadlänge in einer Arboreszenz $\Theta(n)$ ist, wenn n die Zahl der Elemente ist.

   b) Zeigen Sie, dass zwei Fibonacci-Heaps mit n_1 und n_2 Elementen in $O(\log(n_1+n_2))$ Zeit verschmolzen werden können. Das Ergebnis soll also ein Fibonacci-Heap sein, der alle n_1+n_2 Elemente enthält. (2+2 Punkte)

4. Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dabei seien alle Kantengewichte verschieden, also $c(e) \neq c(e')$ für $e \neq e'$.

   (a) Ein zweitbester Spannbaum sei ein Spannbaum, der von T verschieden ist und unter allen von T verschiedenen Spannbäumen kleinste Kosten hat. Zeigen Sie, dass es mehrere zweitbeste Spannbäume geben kann.

   (b) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Berechnung eines zweitbesten Spannbaums zu einem gegebenen Spannbaum T an. Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens. (2+2 Punkte)

5. Betrachten Sie folgendes Problem: Gegeben seien ein ungerichteter zusammenhängender Graph G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, ein Knoten $v_0 \in V(G)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |\delta_G(v_0)|$. Gesucht ist ein aufspannender Baum von T in G, so dass v_0 in T mindestens Grad k hat, der unter allen aufspannenden Bäumen in G, in denen v_0 mindestens Grad k hat, minimales Gewicht hat. Geben Sie einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit an, der dieses Problem löst. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 26.11.2015, **vor** der Vorlesung.

Ein Hinweis der Fachschaft Mathematik: Die Fachschaft Mathematik feiert am 26.11. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 23.11., Di. 24.11. und Mi. 25.11. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de