Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
7. Übung

1. Es sei G ein bipartiter Graph mit Bipartition $V(G) = A\dot{\cup}B$, $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_k\}$. Für jeden Vektor $x = (x_e)_{e\in E(G)}$ sei $M_G(x) = (m_{ij}^x)_{1\le i,j\le k}$ die Matrix mit
$$m_{ij}^x := \begin{cases} x_e & \text{für } e = \{a_i, b_j\} \in E(G), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Die Determinante $\det M_G(x)$ ist dann also ein Polynom in $x = (x_e)_{e\in E(G)}$. Zeigen Sie, dass G genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn $\det M_G(x)$ nicht identisch Null ist. (4 Punkte)

2. Sei G ein kreisfreier gerichteter Graph mit n Knoten. Entfernt man aus G nacheinander alle Kanten (v, w), für die es einen v-w-Weg gibt, der aus mehr als einer Kante besteht, so nennt man das Ergebnis die transitive Reduktion von G. Wie kann man in Zeit $O(n^3)$ die transitive Reduktion eines kreisfreien Graphen berechnen? (4 Punkte)
Hinweis: Modifizieren Sie den Floyd-Warshall-Algorithmus.

3. Die Zeitsteuerungsbedingungen („timing constraints“) eines Logikchips lassen sich durch einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ darstellen. Dabei entsprechen die Knoten den Speicherelementen und die Kanten gewissen durch die kombinatorische Logik definierten Wegen, während die Gewichte (Schätzungen der) Signallaufzeiten entsprechen. Eine Teilaufgabe des Chip-Designs ist es, einen optimalen Takt-Zeitplan zu finden, d.h. eine möglichst kleine Zahl T und eine Abbildung $a : V(G) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $a(v) + c((v, w)) \le a(w) + T$ für alle $(v, w) \in E(G)$. Hierbei ist T die Zykluszeit des Chips, und $a(v)$ bzw. $a(v) + T$ sind die Startzeit bzw. die späteste zulässige Ankunftszeit des Signals in v.

   a) Reduzieren Sie das Problem, das optimale T zu finden, auf das Minimum-Mean-Cycle-Problem.
   b) Zeigen Sie, wie man die Zahlen $a(v)$ einer optimalen Lösung effizient bestimmen kann.
   c) Typischerweise sind einige der Zahlen $a(v)$ vorab festgelegt. Man zeige, wie man in diesem Fall das Problem lösen kann. (2+2+2 Punkte)

4. Im Tagebau sollen Rohstoffe gefördert werden. Jeder Kubikmeter Gestein wird durch einen Knoten in einem gerichteten Graphen G modelliert. Eine Kante $(v, w) \in E(G)$ bedeutet, dass v nicht abgebaut werden kann, ohne dass auch w abgebaut wird (zum Beispiel weil w oberhalb von v liegt). Der Abbau von einem Kubikmeter Gestein $v \in V(G)$ bringt einen (möglicherweise negativen) Profit $p(v)$. Wie bestimmt man effizient eine abzubauende Menge $X \subseteq V(G)$, die den maximalen Profit $p(X)$ bringt? (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 17.12.2015, vor der Vorlesung.