Wintersemester 2015/16 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Hougardy Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik

9. Übung

1. Sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit MA-Reihenfolge $v_1, \ldots, v_n$. Für $u, v \in V(G)$ sei κ_{uv}^G die maximale Anzahl intern disjunkter u-v-Wege in G. Beweisen Sie, dass dann $\kappa_{v_{n-1}v_n}^G = |E(\{v_n\}, \{v_1, \ldots, v_{n-1}\})|$ gilt. (6 Punkte)
Hinweis: Man beweise induktiv, dass $\kappa_{v_j v_i}^{G_{ij}} = |E(\{v_j\}, \{v_1, \ldots, v_i\})|$ für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt, wobei $G_{ij} = G[\{v_1, \ldots, v_i\} \cup \{v_j\}]$. Dazu nehme man o.B.d.A. $\{v_j, v_i\} \notin E(G)$ an (überlegen Sie auch, warum das keine Einschränkung ist), wähle eine kleinste Menge $Z \subseteq \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$, die v_j und v_i trennt, und lasse $h < i$ die maximale Zahl sein, so dass $v_h \notin Z$ und v_h mit v_i oder v_j benachbart ist (falls es ein solches h gibt).

2. Das gebrochene b-Matching-Problem wird wie folgt definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta(v)} f(e) \leq b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e \in E(G)} c(e)f(e)$ maximiert.
   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein Minimum-Cost-Flow-Problem lösen kann.
   (b) Man zeige, dass, wenn b und u ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung f existiert (d.h. $2f(e)$ muss für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (2+2 Punkte)

3. Man beweise den Zirkulationssatz von Hoffman: Gegeben seien ein gerichteter Graph G und untere bzw. obere Schranken $l, u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$. Es gibt genau dann eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e)$ für alle $v \in V(G)$, wenn
$$\sum_{e \in \delta^-(X)} l(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \quad \text{für alle } X \subseteq V(G) \text{ gilt.}$$
(4 Punkte)

4. Eine Firma schätzt, dass sie in Kalenderwoche i bis zu p_i Autos produzieren kann und bis zu v_i Autos verkaufen kann ($i = 1, \ldots, 52$). Produzierte Autos stehen ab Beginn der folgenden Kalenderwoche zum Verkauf bereit. Ein in Woche i produziertes und in Woche $j > i$ verkauftes Auto belegt in den Wochen $i+1, \ldots, j$ Lagerraum. Die Firma kann immer nur höchstens l Autos lagern. In der ersten Kalenderwoche wird nicht produziert, d.h. $p_1 = 0$, es stehen aber aus der Vorjahresproduktion noch p_0 produzierte Autos im Lager.
   (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Firma möchte feststellen, wieviele Autos sie bis zur k-ten Kalenderwoche maximal verkaufen kann.
   (b) Außerdem möchte sie wissen, ob sich diese Zahl verringert, wenn sie die Produktion auch in der zweiten Kalenderwoche ruhen lässt.
   (c) Bei Produktionskosten von P und Verkaufserlösen von V je Auto, sowie Lagerkosten von L je Auto und Woche stellt sich die Frage, wann wieviele Autos produziert werden sollen, um den Gewinn zu maximieren. Ignorieren Sie dabei Zinseffekte.

   Können Sie der Firma helfen? (2+1+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 14.1.2016, vor der Vorlesung.