Wintersemester 2016/17 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Held | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
6. Übung

1. Betrachten Sie die folgende Variante des MOORE-BELLMAN-FORD-ALGORITHMUS: Numeriere die Knoten des gegebenen Graphen G in einer beliebigen Reihenfolge, es sei also $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Betrachte nun in jeder Iteration die Kanten in folgender Reihenfolge: Durchlaufe die Knoten von v_1 nach v_n und betrachte für jeden dabei besuchten Knoten v_i alle Kanten $(v_i, v_j) \in E(G)$ mit $i < j$, um $l(v_j)$ neu zu setzen. Durchlaufe anschließend alle Knoten von v_n nach v_1 und betrachte für jeden dabei besuchten Knoten v_i alle Kanten $(v_i, v_j) \in E(G)$ mit $j < i$, um $l(v_j)$ neu zu setzen. Zeigen Sie, dass, wenn man in jeder Iteration alle Kanten in dieser Reihenfolge betrachtet, $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ Iterationen ausreichend sind. (5 Punkte)

2. Betrachten Sie das folgende Problem: Gegeben sind ein gerichteter Graph G, $s, t \in V(G)$ mit $s \neq t$, $u : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, eine Menge $F \subseteq E(G)$ und eine Zahl $X > 0$. Gesucht ist eine minimale Zahl $\Delta \geq 0$, so dass es in (G, u_Δ, s, t) einen s-t-Fluss mit Wert X gibt, wobei $u_\Delta : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$ definiert sei durch
$$u_\Delta(e) = \begin{cases} u(e) & \text{falls } e \in E(G) \setminus F, \\ u(e) + \Delta & \text{falls } e \in F. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass es für dieses Problem einen stark polynomiellen Algorithmus gibt. (5 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass das Minimum-Ratio-Cyle-Problem in einfachen Graphen auch in Zeit $O(n^2 m \log n)$ gelöst werden kann. (5 Punkte)

   Hinweis: Überlegen Sie sich, wie man über einer stückweise linearen Funktion ein Optimum finden kann. Beachten Sie außerdem, dass man in einer Iteration des MOORE-BELLMAN-FORD-ALGORITHMUS für eine Label-Aktualisierung eines Knotens w über eine Kante $\{v, w\}$ das Label von v aus der vorigen Iteration nutzen kann, auch wenn sich $l(w)$ inzwischen geändert hat.

4. Im Tagebau sollen Rohstoffe gefördert werden. Jeder Kubikmeter Gestein wird durch einen Knoten in einem gerichteten Graphen G modelliert. Eine Kante $(v, w) \in E(G)$ bedeutet, dass v nicht abgebaut werden kann, ohne dass auch w abgebaut wird (zum Beispiel weil w oberhalb von v liegt). Der Abbau von einem Kubikmeter Gestein $v \in V(G)$ bringt einen (möglicherweise negativen) Profit $p(v)$. Wie bestimmt man effizient eine abzubauende Menge $X \subseteq V(G)$, die den maximalen Profit $p(X)$ bringt? (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 1.12.2016, vor der Vorlesung.