Wintersemester 2016/17 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Held | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
7. Übung

1. Man zeige, dass der PUSH-RELABEL-ALGORITHMUS $O(n^2m)$ nichtsaturierende Pushes durchführt, unabhängig von der Wahl des aktiven Knotens v. (5 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie $\Phi := \sum_{v \text{ aktiv}} \psi(v)$.

2. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk, $n = |V(G)|$, f ein s-t-Präfluss in (G, u) und ψ eine Distanzmarkierung bezüglich f mit $\psi(v) \leq 2n$ für alle $v \in V(G)$. Sei $\psi'(v) := \min\{\mathrm{dist}_{G_f}(v, t), n + \mathrm{dist}_{G_f}(v, s), 2n\}$ für alle $v \in V(G)$.
   Zeigen Sie: ψ' ist eine Distanzmarkierung bezüglich f, und es gilt $\psi(v) \leq \psi'(v)$ für alle $v \in V(G)$. (5 Punkte)

3. Man betrachte eine Verallgemeinerung des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind (d.h. $u(e) = \infty$ für manche Kanten e). Eine Instanz (G, u, b, c) heißt *unbeschränkt*, wenn es für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ einen b-Fluss f in (G, u) gibt mit $c(f) < \gamma$.
   (a) Man zeige, dass eine Instanz genau dann unbeschränkt ist, wenn es einen b-Fluss in (G, u) gibt und ein negativer Kreis existiert, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.
   (b) Man zeige, wie man in $O(n^3 + m)$-Zeit entscheiden kann, ob eine Instanz unbeschränkt ist.
   (c) Man zeige, dass in einer nicht unbeschränkten Instanz jede unendliche Kapazität auf äquivalente Weise durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann. (2+1+2 Punkte)

4. Das gebrochene b-Matching-Problem wird folgendermaßen definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta(v)} f(e) \leq b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e \in E(G)} c(e)f(e)$ maximiert.
   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEM lösen kann.
   (b) Man zeige, dass, wenn b und u ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung f existiert (d.h. $2f(e)$ muss für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (3+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 8.12.2016, vor der Vorlesung.