Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
9. Übung

1. Es sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems mit ganzzahligen Kosten c. Außerdem sei f eine optimale Lösung und $e_0 \in E(G)$. Die Kostenfunktion $c' : E(G) \to \mathbb{Z}$ sei wie folgt definiert: $c'(e_0) = c(e_0) + 1$ und $c'(e) = c(e)$ für $e \in E(G) \setminus \{e_0\}$. Zeigen Sie, wie man zu gegebenem (G, u, b, c'), e_0 und f in Zeit $O(|E(G)| + |V(G)|^3)$ einen kostenminimalen Fluss in (G, u, b, c') finden kann. (5 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass Orlins Algorithmus auf zulässigen Instanzen immer eine Lösung f berechnet, so dass der dem Graphen $(V(G), \{e \in E(G) \mid 0 < f(e) < u(e)\})$ zugrundeliegende ungerichtete Graph kreisfrei ist (siehe auch Aufgabe 2 der 8. Übungszettels). (5 Punkte)

3. Betrachten Sie die Kürzeste-Wege-Berechnungen mit Dijkstras Algorithmus innerhalb von Orlins Algorithmus. Zeigen Sie, dass jede dieser Berchnungen sogar für Graphen mit parallelen Kanten in Zeit $O(n^2)$ durchgeführt werden kann, wenn die Inzidenzliste von G nach den Kosten sortiert vorliegt. Folgern Sie daraus, dass Orlins Algorithmus mit einer Laufzeit von $O(mn^2 \log m)$ implementiert werden kann. (5 Punkte)

4. Aufgrund eines erst jetzt entdeckten Fehlers im Buchungssystem hat ein großes Hotel viele Buchungen für das Jahr 2017 angenommen, ohne die Verfügbarkeit freier Zimmer zu prüfen. Jede Buchung betrifft einen bestimmten Zeitraum und bezieht sich auf genau ein Zimmer. Alle Zimmer sind gleichwertig, dennoch wurden die Buchungen zu unterschiedlichen Preisen vorgenommen. Das Hotel möchte nun einigen Kunden absagen, so dass die freien Zimmer ausreichen und möglichst wenige Einnahmen verlorengehen. Wie würden Sie dieses Problem lösen? Kann man erreichen, dass kein Gast während seines Aufenthalts umziehen muss? (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 22.12.2016, vor der Vorlesung.