Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
12. Übung

1. (a) Betrachten Sie 3-Occurrence-Sat, d.h. Satisfiability eingeschränkt auf Instanzen, in denen jede Klausel höchstens drei Literale enthält und jede Variable in höchstens drei Klauseln vorkommt. Man beweise, dass dieses Problem *NP*-vollständig ist.

   (b) Man zeige, dass es *NP*-schwer ist zu entscheiden, ob eine gegebene Satisfiability-Instanz von der Mehrzahl aller Wahrheitsbelegungen der verwendeten Variablen erfüllt wird. (4+3 Punkte)

2. Die Menge der *booleschen Formeln* zu einer Variablenmenge X sei wie folgt definiert: „true“ und „false“ sind boolesche Formeln der Länge 0. „x“ und „$\bar{x}$“ (für $x \in X$) sind boolesche Formeln der Länge 1. Sind ϕ und ϕ' boolesche Formeln der Längen k bzw. k', dann sind „$(\phi \wedge \phi')$“ und „$(\phi \vee \phi')$“ boolesche Formeln der Länge $k + k'$. Weitere boolesche Formeln gibt es nicht.
   Betrachten Sie nun folgendes Problem: Zu einer gegebenen booleschen Formel soll eine äquivalente boolesche Formel minimaler Länge gefunden werden. Dabei heißen zwei boolesche Formeln *äquivalent*, wenn Sie bei natürlicher Auswertung für jede Wahrheitsbelegung der Variablen dasselbe Ergebnis liefern. Zeigen Sie, dass es genau dann einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem gibt, wenn $P = NP$ gilt. (5 Punkte)

3. Das Clique-Problem (also das Problem, zu entscheiden, ob ein gegebener Graph G eine Clique der Größe k enthält) ist leicht in polynomieller Zeit lösbar, wenn k konstant ist (warum?). Zeigen Sie, dass es aber NP-vollständig bleibt, wenn man es auf k mit $k = O(n^{\frac{1}{t}})$ ein konstantes t einschränkt. (4 Punkte)

4. Sei $k \geq 2$ eine Konstante. Beweisen Sie, dass es *NP*-vollständig ist zu entscheiden, ob ein gegebener ungerichteter Graph G einen aufspannenden Baum T enthält, in dem kein Knotengrad größer als k ist. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 26.1.2017, vor der Vorlesung.