Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
1. Übung

1. Eine Papierfabrik stellt Papierrollen von 3 m Breite her. Die Kunden bestellen allerdings Rollen kleinerer Breite, und die Fabrik muss die bestellten Rollen aus den 3 m breiten Rollen herausschneiden. Zum Beispiel kann eine 3 m breite Rolle in zwei 93 Zentimeter breite Rollen und eine 108 m breite Rolle geschnitten werden, wobei ein Rest von 6 cm bleiben würde. Die aktuell zu bearbeitende Gesamtbestellung bestehe aus:

   - 90 Rollen der Breite 130 cm,
   - 610 Rollen der Breite 108 cm,
   - 395 Rollen der Breite 42 cm und
   - 211 Rollen der Breite 93 cm.

   Stellen Sie ein lineares Programm auf, mit dem die Anzahl der zu produzierenden 3 m breiten Rollen minimiert und ein korrektes Zuschneiden der bestellten Rollen gewährleistet wird. (4 Punkte)

2. Es seien zwei endliche disjunkte Mengen A und B von Punkten in der Ebene gegeben. Wir suchen eine quadratische Funktion $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, so dass alle Punkte in A unter der Kurve $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$ und alle Punkte in B über diese Kurve liegen. Geben Sie ein lineares Programm an, mit dessen Lösung Sie direkt die Existenz eines solchen Polynoms überprüfen können und, falls es existiert, ein solches Polynom angeben können. (5 Punkte)

3. Geben Sie hinreichende und notwendige Bedingungen für die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ an, so dass das lineare Programm $\max\{x + y \mid \alpha x + \beta y \leq \gamma, x \geq 0, y \geq 0\}$

   (a) eine Optimallösung hat,
   (b) eine zulässige Lösung hat,
   (c) unbeschränkt ist. (2+2+2 Punkte)

4. Betrachten Sie folgendes Problem: Gegeben sei ein gerichteter Graph G mit Kantengewichten $w : E(G) \to \mathbb{R}$. Gesucht ist ein gerichteter Kreis C in G mit $|V(G)|$ Kanten, so dass $\sum_{e\in E(C)} w(e)$ minimiert wird. Betrachten Sie dazu das folgende gemischt-ganzzahlige lineare Programm:

$$\begin{array}{lrll}
\min & \sum\limits_{e\in E} x_e w(e) & & \\
s.t. & \sum\limits_{e\in\delta^+_G(v)} x_e = 1 & & \text{für alle } v \in V(G) \\
 & \sum\limits_{e\in\delta^-_G(v)} x_e = 1 & & \text{für alle } v \in V(G) \\
 & u_v \geq 1 & & \text{für alle } v \in V(G) \\
 & u_v \leq |V| & & \text{für alle } v \in V(G) \\
 & x_e \in \{0, 1\} & & \text{für alle } e \in E(G)
\end{array}$$

   Fügen Sie zu dieser Formulierung noch $O(|V(G)|^2)$ Nebenbedingungen hinzu (unter Benutzung der im Moment noch überflüssigen Variablen u_v), so dass ein gemischt-ganzzahliges LP entsteht, dessen Lösung direkt einen optimalen Kreis liefert, wenn ein solcher existiert. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 25. Oktober, 2016, vor der Vorlesung.