Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
4. Übung

1. Es sei $H = (V, E)$ ein Hypergraph, also V eine endliche Menge von Knoten und $E \subseteq 2^V$. Außerdem seien $F \subseteq V$ und $x, y : F \to \mathbb{R}$ gegeben.

   (a) Beschreiben Sie das folgende Problem als lineares Programm. Gesucht ist eine Erweiterung $x, y : V \setminus F \to \mathbb{R}$, so dass

   $$\sum_{e\in E} \left(\max_{v\in e} x(v) - \min_{v\in e} x(v) + \max_{v\in e} y(v) - \min_{v\in e} y(v) \right)$$

   minimiert wird.

   (b) Dualisieren Sie das lineare Programm aus Teil (a) und zeigen Sie, dass das duale LP äquivalent zu einem Min-Cost-Flow-Problem ist (siehe unten). (2+3 Punkte)

   Hinweis: Bei einem Min-Cost-Flow-Problem sind ein gerichteter Graph G, Kantenkapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, Kantenkosten $c : E(G) \to \mathbb{R}$ und Werte $b : V(G) \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v\in V(G)} b(v) = 0$ gegeben. Gesucht ist eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum\limits_{e\in\delta^+_G(v)} f(e) - \sum\limits_{e\in\delta^-_G(v)} f(e) = b(v)$, so dass $\sum\limits_{e\in E} f(e) \cdot c(e)$ minimiert wird.

   Bemerkung: Dieses Problem ist eine Relaxierung des Platzierungsproblems im Chip-Design. Die Knoten entsprechen Bauteilen des Chips, und die Hyperkanten geben an, welche Gruppen von Bauteilen miteinander verbunden sind. Die Knoten in F sind vorplatzierte Elemente. Das Problem wird deutlich schwerer, wenn man zusätzlich einfordert, dass die Bauteile sich nicht überlappen dürfen.

2. Betrachten Sie zu einem gegebenem gerichteten Graph G und Knoten $s, t \in V(G)$, $s \neq t$ sowie Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$ die LP-Formulierung des Maximum-Flow-Problems:

   $$\begin{array}{llcll} \max & \sum\limits_{e\in\delta^+_G(s)} x_e - \sum\limits_{e\in\delta^-_G(s)} x_e & & & \\ \text{s.t.} & x_e & \geq & 0 & \text{for } e \in E(G) \\ & x_e & \leq & u(e) & \text{for } e \in E(G) \\ & \sum\limits_{e\in\delta^+_G(v)} x_e - \sum\limits_{e\in\delta^-_G(v)} x_e & = & 0 & \text{for } v \in V(G) \setminus \{s, t\} \end{array}$$

   Es sei $P_{G,u,s,t}$ das Polyeder der zulässigen Lösungen dieses LPs.

   (a) Geben Sie eine Instanz (G, u, s, t) des Maximum-Flow-Problems und eine Facette F des zugehörigen Polyeders $P_{G,u,s,t}$ an.

   (b) Für welche Instanzen hat $P_{G,u,s,t}$ keine Facette? (2+1 Punkte)

3. Es sei P ein Polyeder mit $\dim(P) = d$ und F eine Fläche von P mit $\dim(F) = k \in \{0, \ldots, d-1\}$. Zeigen Sie, dass es Flächen $F_{k+1}, F_{k+2}, \ldots, F_{d-1}$ von P gibt mit

   i) $F \subseteq F_{k+1} \subseteq F_{k+2} \subseteq \cdots \subseteq F_{d-1} \subseteq P$,

   ii) $\dim(F_{k+i}) = k + i$ für $i \in \{1, \ldots, d-k-1\}$. (5 Punkte)

4. Zu einem Polytop $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ sei $P' := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid Ax \leq tb, 0 \leq t \leq 1\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass dann $P' = \operatorname{conv}((P \times \{1\}) \cup \{0\})$ gilt.

   (b) Beweisen Sie, dass für jede Fläche F von P die Menge $\operatorname{conv}((F \times \{1\}) \cup \{0\})$ eine Fläche von P' ist.

   (c) Gelten diese Aussagen auch noch zwingend, wenn P ein Polyeder, aber nicht unbedingt ein Polytop ist? (3+2+2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 15. November, 2016, vor der Vorlesung.